T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİOTOMORFİZMALARIN ÇARPIMSAL YAPISI VE OTOMORFİZMALARLA İLİŞKİLERİ

İBRAHİM GÖKCAN

TEZ DANIŞMANI

DOÇ. DR. RUŞEN YILMAZ

TEZ JÜRİLERİ

PROF. DR. YILMAZ ALTUN

DOÇ. DR. KADİR KUTLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2017

T.C.

RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİOTOMORFİZMALARIN ÇARPIMSAL YAPISI VE OTOMORFİZMALARLA İLİŞKİLERİ

Doç. Dr. Ruşen YILMAZ danışmanlığında, İbrahim GÖKCAN tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 06/06/2017 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvan Adı Soyadı**	**İmzası**
Başkan	:	Prof. Dr. Yılmaz ALTUN	
Üye	:	Doç. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	:	Doç. Dr. Kadir KUTLU	

Doç. Dr. Ferhat KALAYCI

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Biotomorfizmaların Çarpımsal Yapısı ve Otomorfizmalarla İlişkileri konusunun araştırıldığı bu çalışma, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda "Yüksek Lisans Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Teknolojinin akıl almaz boyutlara ulaştığı bu dönemde, teknolojinin öncü güçlerinden biri olan matematiğinde bu ilerlemedeki payı yadsınamaz. Her geçen gün dünya üzerinde var olan matematiksel bilgi artmakta ve farklı disiplinlerle etkileşime girerek günümüz teknolojisine uyarlanması zor ve anlaşılması güç, ancak uzun yıllar sonra anlaşılabilecek ve teknolojide uygulama alanı bulabilecek bir hal almaktadır.

Fonksiyonel analiz, cebir ve topoloji gibi bazı alt bilim dallarında uygulama alanı bulunan otomorfizmalar, biotomorfizmalar ve otomorfizmaların çarpımsal yapısı dâhilinde biotomorfizmaların içine yerleştirilmesi konusu izah edilmeye çalışılmıştır. Konu bütünlüğü içinde konunun tam olarak izah edilebilmesi ve hedeflenen duruma gelinebilmesi için otomorfizma ve biotomorfizma kavramları için temel teşkil eden lineerlik, homomorfizma ve izomorfizma konularına kısa kısa yer verilmiştir.

Bu çalışmam esnasında yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Ruşen YILMAZ' a, mesai arkadaşlarıma, aileme ve eşime saygılarımla...

İbrahim GÖKCAN

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan "Biotomorfizmaların Çarpımsal Yapısı ve Otomorfizmalarla İlişkileri" başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim.06/06/2017

İbrahim GÖKCAN

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BİOTOMORFİZMALARIN ÇARPIMSAL YAPISI VE OTOMORFİZMALARLA İLİŞKİLERİ

İbrahim GÖKCAN

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Ruşen YILMAZ

Bu çalışmada biotomorfizmalar için temel teşkil eden homomorfizma, izomorfizma ve otomorfizma kavramlarının Riesz uzayları üzerinde tanımları yapılmıştır. Çalışma Riesz uzayları üzerinde gerçekleştirildiği için Riesz uzayları ve Riesz cebirlerine dair temel bilgiler kısaca izah edilmiştir. Archimedean Riesz uzayları üzerinde tanımlanan biotomorfizmaların $f-$cebiri, yarı asal olma durumları ele alınmıştır. Otomorfizmalar ve biotomorfizmalar arasındaki ilişkiler, biotomorfizmaların çarpımsal yapıları ve özellikleri açıklanmaya çalışılmıştır. Özel olarak, otomorfizmalar uzayının biotomorfizmalar uzayı içine yerleştirilmesi konusu incelenmeye çalışılmıştır.

2017, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Riesz Cebiri, Otomorfizma, Biotomorfizma.

ABSTRACT

MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF BIORTHOMORPHISMS AND RELATION WITH ORTHOMORPHISMS

İbrahim GÖKCAN

Recep Tayyip Erdoğan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

In this study, the definitions of homomorphism, isomorphism and orthomorphism, which are the basis of biorthomorphism, have been made on Riesz spaces. As the study is carried out for Riesz spaces, basic informations about Riesz spaces and Riesz algebra are briefly explained. The structure of $f-$algebras and semiprime of biorthomorphisms defined on Archimedean Riesz spaces are investigated. The releationship between orthomorphisms and biorthomorphisms, the multiplicative structure of biorthomorphisms and their properties are examined. In particular, the embedding of the space of orthomorphisms into that of biorthomorphisms is investigated.

2017, 41 pages

Keywords: Riesz Algebra, Orthomorphism, Biorthomorphism.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ I

TEZ ETİK BEYANNAMESİ II

ÖZET III

ABSTRACT..IV

İÇİNDEKİLER V

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ VI

1. GENEL BİLGİLER……………..………..……………………………….……..….1

1.1. Giriş…………...1

1.2. Riesz Uzayı..2

1.3. Riesz Cebiri………………………………………………………………….....4

1.4. Riesz Homomorfizmaları ve Riesz İzomorfizmaları …………………………..14

1.5. İdeal, Solid ve Bant …………………………………………………………..…17

1.6. Riesz Uzaylarında Otomorfizmalar ………………………………………….……19

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR ……………………………...……………......23

2.1. Riesz Uzaylarında Biotomorfizmalar ...…………………………….……………..23

2.2. Biotomorfizmalar Uzayının Çarpımsal Yapısı……………………………….……26

2.3. Otomorfizmaların Biotomorfizmaların İçine Yerleştirilmesi …………………..…32

3. SONUÇLAR ve TARTIŞMA………………….……………...........................37

4. ÖNERİLER…………………….……………………………………….…...38

KAYNAKLAR……………………………………………………………….…..39

ÖZGEÇMİŞ……………………………………………………………….…...41

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\leq$	Kısmi Sıralama Bağıntısı
$(E, \leq)$	Kısmi Sıralı Küme
$x \vee y$	x ve y nin Supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin İnfimumu
a^+	Pozitif Kısmı
a^-	Negatif Kısmı
$\lvert a \rvert$	Modülüs
x_λ	E üzerinde Bir Ağ
T	Lineer Dönüşüm
$\tilde{E}$	Birinci Dual
$\tilde{\tilde{E}}$	İkinci Dual
$L(E, \mathbb{R})$	E Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Lineer Operatörlerin Uzayı
$L_b(E, \mathbb{R})$	E Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Sıralı Sınırlı Lineer Operatörlerin Uzayı
$L_r(E, \mathbb{R})$	E Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Düzenli Lineer Operatörlerin Uzayı
$L(E, F; \mathbb{R})$	$E \times F$ Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Lineer Operatörlerin Uzayı
$L_b(E, F; \mathbb{R})$	$E \times F$ Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Sıralı Sınırlı Lineer Operatörlerin Uzayı
$L_r(E, F; \mathbb{R})$	$E \times F$ Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Düzenli Lineer Operatörlerin Uzayı
$L_{bv}(E, F; \mathbb{R})$	$E \times F$ Uzayından $\mathbb{R}$ Uzayına Sıralı Sınırlı Varyasyonlu Bilineer Operatörlerin Uzayı
$f(x, .)(y)$	y Değişkenine Bağlı Bilineer Dönüşüm
$f(., y)(x)$	x Değişkenine Bağlı Bilineer Dönüşüm
$O(E)$	E Üzerinde Tanımlı Otomorfizmaların Kümesi
$O(E, E)$	E Üzerine Tanımlı Biotomorfizmaların Kümesi
$N(E)$	Nilpotent Küme
$I_e = E$	Güçlü Birim

$B_e = E$	Zayıf Birim
$C(E)$	Tüm Sürekli Reel Fonksiyonların Uzayı
$C_b(E)$	Tüm Sıralı Sınırlı Reel Fonksiyonların Uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Biotomorfizmaların çarpımsal yapısı ve otomorfizmalarla ilişkileri konusunun Riesz uzayları üzerindeki örnekleminin incelendiği bu çalışmada, daha sonraki irdelemeye çalışacağımız bazı tanım ve teoremlerin daha iyi anlaşılması için Riesz uzayları ve bu uzaylar üzerinde tanımlanan Riesz cebirlerine yönelik bazı tanımlar ve tarihsel süreç izah edilmiştir.

Riesz uzaylarının ve Riesz cebirlerinin tarihsel gelişimine bakacak olursak Riesz uzayları sıralı vektör uzayının tarihini Riesz'e ve 1928' de Bologna'daki Uluslararası Matematik Kongresine dayandırabiliriz. Riesz uzayları üzerinde tanımlanan $f-$cebirleri, Dedekind tam sıralı vektör uzayı için 1950' de Nakano (Nakano,1950) tarafından başlatılmış ve 1953' te Amemiya (Amemiya, 1953) ve 1956' da Birkhoff ve Pierce (Birkhoff ve Pierce, 1956) tarafından bugünkü tanımı yapılmıştır. Genel olarak Riesz uzaylarının kesin tanımlanma tarihini söylemek zor olmakla birlikte bu tarihler arasında geliştiğini söyleyebiliriz. Riesz uzayı sıralı gruplarının gelişimi Riesz uzaylarının gelişimine benzerlik gösterir. Riesz uzayları ve sıralı grupları analizciler ve cebirciler tarafından kapsamlı bir şekilde irdelenmeye çalışılmış olup 1950' li yıllardan sonra Riesz uzayları üzerinde tanımlanan $f-$cebirleri konusunun tekrar gündeme taşınması 1982 yılında Pagter'in doktora tez çalışmasında ve Lüxemburg tarafından Alkansas ders notlarında ciddi olarak ele alınmasıyla gerçekleşmiştir. Zamanla Riesz uzayları üzerinde $f-$cebiri, $d-$cebiri ve hemen hemen $f-$cebiri tanımlanmıştır. Zaanen, Huijsmans, Boulabiar, Buskes ve Triki gibi matematikçiler tarafından Riesz uzayları üzerinde homomorfizma, izomorfizma, otomorfizma ve biotomorfizmalar tanımlanmıştır.

Bu çalışmada esas olarak 2016 yılında K. Boulabiar ve W. Brahmi tarafından yayınlanan "Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms" başlıklı makale baz alınmıştır. "Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms" (Boulabiar and Brahmi, 2016) başlıklı makalede ise esas olarak G. Buskes, R. Page ve R. Yilmaz tarafından yayınlanan "A note on bi-orthomorphisms" (Buskes vd., 2010) başlıklı makalede yer verilen “Bir biotomorfizmalar uzayı ne zaman $f -$cebiri olur” sorusuna cevap verilmeye çalışılmıştır.

Buna ilave olarak bu çalışmamızda (Aliprantis ve Burkinshow, 1985), (Aliprantis ve Burkinshow, 2006), (Birkhoff, 1987), (Luxsemburg ve Zaanen, 1971), (Zaanen, 1983) standart kitapları ile (De Pagter, 1984) ve (Yılmaz, 2001) Ph.D. tezleri temel kaynak olarak alınmıştır.

Çalışmada yer alan E vektör uzayları aksi belirtilmedikçe Archimedean Riesz uzayı olarak ele alınmıştır.

1.2. Riesz Uzayı

1. Tanım E boştan farklı bir küme olsun. E üzerinde tanımlı $\leq$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\leq$ bağıntısına (kısmi) sıralama bağıntısı, $(E, \leq)$ ikilisine (kısmi) sıralı küme denir.

i. Her $x \in E$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği)

ii. Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ (ters simetri özelliği)

iii. Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ (geçişme özelliği).

2. Tanım $(E, \leq)$ bir sıralı vektör uzayı olsun. Her boştan farklı sonlu alt kümenin $\leq$ bağıntısına göre supremumu varsa E ye bir Riesz uzayı (veya bir vektör latisi) adı verilir. Klasik Riesz uzayı notasyon olarak $\{a, b\}$ kümesinin supremumu $a \vee b$ ile gösterilir. Yani $a \vee b = \sup\{a, b\}$ olur (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

3. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. Herhangi bir $a \in E$ için; $a^+ = a \vee 0$ile tanımlanan a^+ ya a nın pozitif kısmı, $a^- = -a \vee 0$ ile tanımlanan a^- ya a nın negatif kısmı denir ve $|a|$ ya a nın modülüsü denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

4. Tanım E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise bu durumda x y ye diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

$\emptyset \neq A \subseteq E$ olmak üzere,

$A^d = \{x \in E : \forall y \in A \text{ için } x \perp y\}$

kümesine A kümesinin tümleyeni denir. $A, B \subseteq E$ alındığında her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümeleri diktir denir ve $A \perp B$ ile gösterilir.

5. Tanım E ve F iki vektör uzayı ve $T: E \to F$ dönüşüm olsun.

Her $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$T(x + y) = T(x) + T(y)$

$T(\alpha x) = \alpha T(x)$

koşulları sağlanıyorsa T ye doğrusal dönüşüm adı verilir. Doğrusal dönüşüm yerine operatör kelimesi, $T(x)$ yerine ise Tx gösterimi de kullanılabilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

6. Tanım Bir Riesz uzayının boştan farklı her üstten sınırlı (alttan sınırlı) alt kümesinin bir supremumu (infimumu) varsa, bu uzay Dedekind tam olarak adlandırılır. Benzer şekilde, bir Riesz uzayının boştan farklı üsten sınırlı her sayılabilir alt kümesinin supremumu varsa o uzaya Dedekind σ-tam denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

7. Tanım $E \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde bir $\leq$ bağıntısı verilsin. E kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısına göre aşağıdaki önermeler sağlanırsa, E kümesine $\leq$ bağıntısına göre yukarı yönlendirilmiş küme denir.

i. $\forall \lambda \in E$ için $\lambda \leq \lambda$,

ii. $\forall \lambda, \alpha, \beta$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\alpha \leq \beta$ için $\lambda \leq \beta$,

iii. $\forall \lambda, \beta$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\beta \leq \alpha$ için $\lambda \leq \beta$ olacak şekilde bir $\alpha \in E$ vardır.

8. Tanım $(E, \leq)$ yönlendirilmiş kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X içinde bir ağ denir.

9. Tanım (x_λ) E üzerinde bir ağ olmak üzere $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ olsun. E deki sıralamaya göre eğer $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı yukarı yönlendirilmiştir denir ve $x_\lambda \uparrow$ ile gösterilir. E içinde $x_\lambda \uparrow$ ve $sup(x_\lambda) = x$ elemanı varsa $x_\lambda \uparrow x$ biçiminde gösterilir.

(x_λ) E üzerinde bir ağ olmak üzere $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ olsun. E deki sıralamaya göre eğer $x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı aşağı yönlendirilmiştir denir ve $x_\lambda \downarrow$ ile gösterilir. E içinde $x_\lambda \downarrow$ ve $inf(x_\lambda) = x$ elemanı varsa $x_\lambda \downarrow x$ biçiminde gösterilir.

10. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. $x, y \in E^+$ olmak üzere eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$nx \leq y \Longrightarrow x = 0$$

sağlanıyorsa E ye Archimedean Riesz uzayı denir.

Her Riesz uzayı Archimedean değildir. Örneğin $E = \mathbb{R}^2$ olarak alınırsa sözlük (lexicographically) sıralamaya göre Archimedean değildir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

1.3. Riesz Cebiri

1. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. E bir birleşmeli cebir ve $\forall x, y \in E^+$ için $xy \in E^+$ ise E ye bir Riesz cebiri (veya sıralı latis cebiri) denir .

2. Tanım E bir Riesz cebiri olsun. $\forall x \in E$ için $x \cdot x = x^2 \in E^+$ ise E ye pozitif kareli veya pozitif kare özelliğine sahiptir denir.

3. Teorem E bir Riesz cebiri ise aşağıdaki özellikler sağlanır. $\forall x, y \in E$ için

1) $x \leq y$ ise $\forall z \in E^+$ için $xz \leq yz$ ve $zx \leq zy$.

2) $0 \leq x \leq y$ ve $0 \leq u \leq v$ $(u, v \in E)$ ise $0 \leq xu \leq yv$.

3) $\forall z \in E^+$ için $z(x \vee y) \geq zx \vee zy$.

4) $\forall z \in E^+$ için $(x \vee y)z \geq xz \vee yz$.

5) $\forall z \in E^+$ için $z(x \wedge y) \leq zx \wedge zy$.

6) $\forall z \in E^+$ için $(x \wedge y)z \leq xz \wedge yz$.

7) $(xy)^+ \leq x^+y^+ + x^-y^-$.

8) $(xy)^- \leq x^+y^- + x^-y^+$.

9) $|xy| \leq |x||y|$

4. Tanım E bir Riesz cebiri olsun. $\forall a, b \in E, a \wedge b = 0$ ve $\forall c \in E^+$ için $ca \wedge b = ac \wedge b = 0$ sağlanıyorsa E ye bir f −cebiri denir (Birkhoff ve Pierce, 1956).

5. Tanım E bir Riesz cebiri olsun. $\forall a, b \in E, a \wedge \mathrm{b} = 0$ için $ab = 0$ sağlanıyorsa E ye bir hemen hemen f −cebiri denir (Birkhoff, 1967).

6. Tanım E bir Riesz cebiri olsun. $\forall a, b \in E, a \wedge b = 0$ ve $\forall \mathrm{c} \in E^+$ için $ca \wedge cb = ac \wedge bc = 0$ sağlanıyorsa E ye d −cebiri denir (Kudlacek, 1962).

Genel olarak her f − cebiri bir d − cebiri aynı zamanda bir hemen hemen f − cebiridir. Fakat d − cebiri ile hemen hemen f − cebiri genel olarak birbirinden bağımsızdırlar (Huijsmans, 1991).

7. Tanım E bir Riesz cebiri olsun.$a \in E$ ve $\exists k \in N$ için $a^k = 0$ iken ancak $a = 0$ ise E ye yarı asal denir. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

8. Örnek

i. $E_b(E)$ Riesz uzayı olduğunda bileşke işlemine göre f −cebiridir.

ii. X boştan farklı topolojik bir uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ birimli bir f −cebiridir.

iii. X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi $\mathbb{R}^x$ noktasal çarpma ile birimli bir f −cebiridir.

9. Teorem E bir yarı asal f −cebiri ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i. E, bir f $-$cebiridir.

ii. E, bir d $-$cebiridir.

iii. E, bir hemen hemen f $-$cebiridir (Huijsmans, 1991).

İspat: i⟹ii E bir Riesz uzayı olsun. $a, b \in E, a \wedge b = 0$ ve

$\forall c \in E^+$ için E bir f $-$cebiri olduğundan

$ca \wedge b = 0 \Longrightarrow \ ca \wedge cb = 0$

bulunur. Yine f $-$cebiri olma özelliğinden

$ac \wedge b = 0 \Longrightarrow \ ac \wedge bc = 0$

elde edilir. O halde E bir d $-$cebiridir.

i⟹iii $a, b \in E$ ve $a \wedge b = 0$ olsun. Buradan $a, b \in E^+$ olduğu açıktır. O halde E f $-$cebiri olduğundan

$b \wedge a = 0 \Longrightarrow b \wedge ab = 0 \Longrightarrow ab \wedge ab = 0 \Longrightarrow ab = 0$

bulunur. O halde E bir hemen hemen f $-$cebirdir.

ii⟹iii E bir d-cebiri ve $a, b \in E$ için $a \wedge b = 0$ olsun. E birleşmeli olduğundan

$0 \leq (ab)^2 = (ab)(ab)$

$= (ab)(ab) \wedge (ab)(ab)$

$= ab(ab) \wedge (ab)ab$

$\leq (a + ab)b(ab + b) \wedge (a + ab)a(a + ab)$

$= (a + ab)(b(b + ab) \wedge a(b + ab))$

$= (a + ab)((b \wedge a)(b + ab)) = 0$

bulunur. Sonuç olarak $0 \leq (ab)^2 \leq 0$ bulunur. Buradan $(ab)^2 = 0$ olup E yarı asal olduğundan $ab = 0$ olur. O halde E bir hemen hemen f −cebiridir.

iii⟹i E bir hemen hemen f −cebiri ve $\forall a, b \in E^+$ için $a \wedge b = 0$ olsun. Buradan

$c \in E^+$keyfi olmak üzere

$0 \leq ca \wedge b \leq ca$ ve $0 \leq ca \wedge b \leq b$

olduğu açıktır. $\forall c \in E^+$ için

$0 \leq (ca \wedge b)^2$

$= (ca \wedge b)(ca \wedge b)$

$\leq (ca)b$

$= c(ab)$ (E birleşme özelliğine sahip olduğundan)

$= c0 = 0$ (E bir hemen hemen f −cebiri olduğundan)

elde edilir.

10. Tanım Bir Archimedean f −cebiri olan E nin tüm nilpotent elemanlarının kümesi $N(E)$ ile gösterilir. Genel olarak $N(E) = \{x \in E : x^2 = 0\}$ ile tanımlanır.

$N(E) = \{0\}$ ise E ye yarı asal denir. Bu nedenle E nin yarı asal olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı nilpotent elemanlara sahip olmamasıdır. Dahası eğer E yarı asal f −cebiri ve $x, y \in E$ ise $x.y = 0 \Leftrightarrow |x| \wedge |y| = 0$.

Eğer E yarı asal f −cebiri ve $x, y \in E$ ve $\forall z \in E$ için $zx = zy \Rightarrow x = y$

$x = y \Rightarrow x - y = 0$

$\Rightarrow x - y = x - y$

$\Rightarrow (x - y)x = (x - y)y$

$\Rightarrow x^2 - xy = xy - y^2$

$\Rightarrow x^2 - xy - xy + y^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$\Rightarrow (x - y)^2 = 0.$

E yarı asal olduğundan $x - y = 0$ olur. Buradan $x = y$ elde edilir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

11. Teorem Her Archimedean f −cebiri değişmelidir (Zaanen, 1975).

12. Sonuç E, e birim elemanlı bir f −cebiri olsun. Bu durumda $\forall a \in E^+$ ve $\forall \mathcal{E} > 0$ için

$0 \leq a - (a \wedge \mathcal{E}e) \leq \mathcal{E}^{-1}a^2$ sağlanır.

13. Teorem Herhangi bir Archimedean birim elemanlı f −cebiri yarı asaldır.

İspat: $a \in E^+$ ve $a^2 = 0$ olsun. 1.3.12. Sonuç'tan,

$0 \leq a - (\mathcal{E}e \wedge a) \leq \mathcal{E}^{-1}a^2$ ve $a^2 = 0$ ise E Archimedean olduğundan $\mathcal{E}^{-1}a^2$ ifadesinin infimumu 0 olur. Yani

$0 \leq a - (\mathcal{E}e \wedge a) \leq 0$

$a - (\mathcal{E}e \wedge a) = 0$ elde edilir. $\forall \mathcal{E} > 0$ için

$0 = a - (\mathcal{E}e \wedge a) \Rightarrow a = \mathcal{E}e \wedge a$

$\Rightarrow a = \mathcal{E}e \wedge a$

$\Rightarrow a \leq \mathcal{E}e.$

Özel olarak $\mathcal{E} = 1/n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ olarak alınırsa $a \leq \frac{1}{n}e$ olur. Buradan $an \leq e$ bulunur. O halde E Archimedean olduğundan $a = 0$ olup E yarı asaldır.

14. Teorem Herhangi bir E düzgün (uniform) tam f $-$cebirinde aşağıdaki ifadeler denktirler.

i. E bir kara kök kapalıdır.

ii. E ortak bölen özelliğine sahiptir.

iii. E çarpanlarına ayırma özelliğine sahiptir (Beukers vd., 1983).

15. Teorem Bir düzgün tam yarı asal E f $-$cebirinde

i. Her eş güçlü halka ideal bir I $-$idealdir.

ii. Her eş güçlü halka ideal yarı asaldır (Beukers vd., 1983).

16. Teorem Düzgün tam yarı asal bir E f $-$cebirinde bir I halka ideali için aşağıdaki ifadeler denktirler.

i. I bir kare kök kapalıdır.

ii. $I^2 = I$ (Beukers vd., 1983).

17. Tanım E ve F iki sıralı vektör uzayı ve $T: E \to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x \in E^+$ $(\forall x \geq 0)$için $Tx \in F^+$ $(Tx \geq 0)$ ise T ye pozitif operatör denir.

E den F ye bütün lineer operatörlerin oluşturduğu uzayı $L(E, F)$ ile göstereceğiz. O halde şu tanımı yapabiliriz: $L(E, F) = \{T | T: E \to F \text{ lineer dönüşümler}\}$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

18. Tanım E ve F birer sıralı sınırlı vektör uzayı ve T bir operatör olmak üzere E nin sıralı sınırlı her alt kümesini F nin sıralı sınırlı bir alt kümesine resmediyorsa, bu T dönüşümüne sıralı sınırlı operatör denir. Tüm sıralı sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. O halde

$$L_b(E, F) := \{T |\ T: E \to F \text{ sıralı sınırlı operatörler}\}$$

Her sıralı sınırlı operatör bir pozitif operatördür. O halde sıralı sınırlı operatörlerin oluşturduğu küme pozitif operatörlerin bir alt kümesidir. Yani

$L_b(E,F) \subseteq L(E,F)$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

19. Tanım E ve F iki pozitif opratör olsun. Eğer ki T operatörü iki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabiliyorsa T ye düzenli operatör denir. Tüm düzenli operatörlerin kümesi $L_r(E,F)$ ile gösterilir. O halde,

$L_r(E,F) := \{T \in L(E,F) : \exists T_1, T_2 : E \to F$ pozitif operatörler öyle ki $T = T_1 - T_2\}$.

Her düzenli operatör sıralı sınırlıdır. Dolayısıyla her düzenli operatör pozitiftir. O halde $L_r(E,F) \subseteq L_b(E,F) \subseteq L(E,F)$.

Bu tanımdan her lineer operatörün sıralı sınırlı olması gerekmediği görülür. Yine aynı şekilde sıralı sınırlı her operatörün düzenli operatör olması gerekmez (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

20. Tanım $L_b(E,F)$ özel olarak $F = \mathbb{R}$ alınırsa, $L_b(E,\mathbb{R}) = \check{E}$ uzayına E nin sıralı duali denir. O halde

$\check{E} = \{T | T : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ sıralı lineer fonksiyonel$\}$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

21. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. E nın birinci duali $\tilde{E}$ olmak üzere, E nin ikinci duali $\tilde{\tilde{E}}$

$\tilde{\tilde{E}} := \{T \big| T : \tilde{E} \to \mathbb{R}$ lineer sınırlı$\} = L_b(\tilde{E},\mathbb{R})$

ile tanımlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

22. Tanım E ve F iki Riesz uzayı olsun. $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$

sağlanıyorsa x ve y ye ayrık elemanlar denir. $T : E \to F$ operatörü için

$x \perp y \implies Tx \perp Ty$

oluyorsa T ye ayrık koruyan operatör denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

23. Tanım E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olsun. $|T| = T \vee (-T)$ ise $|T|$ ye T nin modülüsü denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

24. Önerme E bir Riesz uzayı ve F Archimedean Riesz uzayı olmak üzere, eğer bir $T: E \to F$ operatörünün modülüsü mevcutsa $\forall x \in X$ için $|T(x)| \leq |T|(x)$ sağlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

İspat: $\forall x \in E^+$ için

$T(x) \leq T^+(x) \leq |T|(x)$

$-T(x) \leq T^+(x) \leq |T|(x)$

$sup\,\{T(x), -T(x)\} \leq |T|(x)$

$-T(x) \vee T(x) = |T(x)| \leq |T|(x)$.

Şimdi $x \in E$ keyfi olsun.

$|T(x)| = |T(x^+ - x^-)|$

$= |T(x^+) - T(x^-)|$

$\leq |T(x^+)| + |T(x^-)|$

$\leq T(x^+) + T(x^-)$

$\leq |T|(x^+ - x^-)$

$= |T|(x)$.

Buradan $|T(x)| \leq |T|(x)$ elde edilir.

25. Önerme E ve F iki Archimedean Riesz uzayı olmak üzere, T operatörü sıralı sınırlı ayrık koruyan ise $|T|$ modülüsü mevcuttur ve $\forall x \in E$ için

$|T|(x) = |T(|x|)| = |T(x)|$

sağlanır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

İspat: T yi sıralı sınırlı ayrık koruyan operatör olarak kabul edelim. $0 \leq y \leq x$ için $T(y) \leq T(x)$ dir. Gerçekten

$$T(x) = T(x-y) + T(y)$$

$$= [(T(x-y))^{+} - (Ty)^{+}] - [(T(x-y))^{-} - (Ty)^{-}]$$

$T(x)$ in modülüsü alınırsa

$$|T(x)| = [T(x-y)]^{+} + [Ty]^{+} + [T(x-y)]^{-} + [Ty]^{-}$$

$$\geq [T(x-y)] + [Ty] \geq [Ty]$$

bulunur. Şimdi ise E de $|y| \leq x$ olduğunu kabul edelim. Riesz uzayları üzerinde $Ty^{+} \perp Ty^{-}$ özelliğinin sağlandığından hareketle

$$|T(y)| = |Ty^{+} - Ty^{-}| = |Ty^{+} + Ty^{-}| = |T(y^{+} + y^{-})| = |T(|y|)| \leq |Tx|$$

elde edilir. Buradan $\forall x \in E^{+}$ için

$$|Tx| = \sup\{|T(y)| : |y| \leq x\}$$

yazılabilir. $\forall x \in E^{+}$ için $|T(x)| = |T|(x)$ olduğu ise aşikardır. Eğer $x \in E$ ise $T(x^{+}) \perp T(x^{-})$ sağlanır ve

$$|T(|x|)| = |T|(|x|) = |T|(x^{+} + x^{-})$$

$$= |T|(x^{+}) + |T|(x^{-})$$

$$= |T(x^{+})| + |T(x^{-})|$$

$$= |T(x^{+}) - T(x^{-})| = |T(x)|$$

ve böylece ispat tamamlanmış olur.

26. Teorem E ve F iki Riesz uzayı olsun. F Dedekind tam ise $L_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayı olup $L_b(E,F) = L_r(E,F)$ sağlanır. Üstelik $\forall x \in E^{+}$ ve $T \in L_r(E,F)$ için

i. $T^+(x) = \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$

ii. $T^-(x) = \inf\{Ty : 0 \leq y \leq x\}$

iii. $|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

27. Teorem E ve F iki Riesz uzayı olsun. Kabul edelim ki $T: E^+ \to F^+$ dönüşümü, $\forall x, y \in E^+$ için $T(x+y) = T(x) + T(y)$ eşitliğini sağlayan toplamsal bir dönüşüm olsun. O halde T , E den F ye tek bir pozitif operatöre genişler. Bununla birlikte genişleme $\forall x \in E$ için

$$T(x) = T(x^+) - T(x^-)$$

ile verilir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

28. Tanım E, F ve G Archimedean Riesz uzayları olsun. Eğer $\forall(x, y) \in E^+ \times F^+$ için

$$\left\{\sum_{n,m}^{N,M} |T(a_n, b_m)| : a_n \in E^+, b_m \in F^+ \text{ ve } \sum_{n=1}^{N} a_n = x, \sum_{m=1}^{M} b_m = y\ (N, M \in \mathbb{N})\right\}$$

kümesi eğer G de sıralı sınırlı ise, $T: E \times F \to G$ dönüşümüne sıralı sınırlı varyasyon denir. Tüm sıralı sınırlı varyasyonlu bilineer operatörlerin kümesi ise $L_{bv}(E, F; G)$ ile gösterilir. Eğer $\forall(x, y) \in E^+ \times F^+$ için

$$\{T(a, b): 0 \leq a \leq y, 0 \leq b \leq y\}$$

sıralı sınırlı ise T ye sıralı sınırlı denir. Tüm sıralı sınırlı bilineer dönüşümlerin uzayı $L_b(E, F; G)$ ile gösterilir.

Eğer $x \in E^+$ ve $y \in F^+$ için $T(x, y) \in G^+$ ise T pozitiftir. $L_b(E, F; G)$ kümesindeki düzenli bilineer dönüşümlerin kümesini $L_r(E, F; G)$ ile göstereceğiz. Eğer $T_2 - T_1$ pozitif $\Leftrightarrow T_1 \leq T_2$ sıralamasına göre $L_b(E, F; G)$ ve $L_{bv}(E, F; G)$ sıralı vektör uzaylarıdır.

Sonuç olarak $L_r(E,F;G) \subseteq L_{bv}(E,F;G) \subseteq L_b(E,F;G)$ sağlanır. Fakat tersi doğru değildir. $L_r(E,F;G)$ ve $L_{bv}(E,F;G)$, $L_b(E,F;G)$ nin alt vektör uzaylarıdır. Ancak eğer G Dedekind tam ise $L_r(E,F;G) = L_{bv}(E,F;G)$ olur ve bu uzay artık Dedekind tam Riesz uzayıdır. Buna ilave olarak eğer G Dedekind tam ise herhangi bir $T \in L_{bv}(E,F;G)$ için $|T|$ modülüsü mevcut olup aşağıdaki formülle belirlenebilir;

$|T|(x,y) = \sup\{\sum_{n,m}^{N,M}|T(a_n,b_m)|: a_n \in E^+, b_m \in F^+ \text{ ve } \sum_n^N a_n = x, \sum_m^M b_m = y\}$.

Ayrıca herhangi bir $x \in E^+$ve $y \in F^+$ için $|T(x,y)| \leq |T|(|x|,|y|)$ sağlanır.

Eğer $\forall a \in E$ ve $b \in F$ için $E \times F$ de $(a_1,b_1) \perp (a_2,b_2)$ iken G de $T(a_1,b) \perp T(a_2,b)$ ve $T(a,b_1) \perp T(a,b_2)$ sağlanırsa $T: E \times F \to G$ bilineer operatörüne ayrı ayrı ayrık koruyan operatör denir.

Eğer $\forall z \in E$ için E de $x \perp y$ iken $T(x,z) \perp y$ ve $T(z,x) \perp y$ sağlanıyorsa $T: E \times E \to E$ bilineer operatörüne ayrı ayrı bant koruyan operatör denir.

Eğer $a \to T(a,y)(a \in E)$ ve $b \to T(x,b)(b \in F)$ sıralı sınırlı iseler $T: E \times F \to G$ bilineer operatörüne ayrı ayrı sıralı sınırlı denir (Buskes vd., 2010).

1.4. Riesz Homomorfizmaları ve Riesz İzomorfizmaları

1. Tanım E ve F iki Riesz uzayı olsun. Eğer $\forall f,g \in E$ için $T: E \to F$ dönüşümü $T(f \vee g) = Tf \vee Tg$ özelliğini sağlarsa, bir lineer operatör olan T ye Riesz homomorfizması denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

2. Teorem E,F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

i. T Riesz homomorfizmasıdır.

ii. $\forall f,g \in E$ için $T(f \wedge g) = Tf \wedge Tg$.

iii. $\forall f,g \in E$ ve $f \wedge g = 0$ ise $Tf \wedge Tg = 0$.

iv. $\forall f \in E$, $|Tf| = T(|f|)$.

v. $\forall f \in E$, $T(f^+) = (Tf)^+$.

vi. $\forall f \in E, T(f^-) = (Tf)^-$.

İspat: i $\Longrightarrow$ ii $(f + g) = (f \vee g) + (f \wedge g)$

$\Longrightarrow T(f + g) = T((f \vee g) + (f \wedge g))$

$\Longrightarrow T(f + g) = T(f \vee g) + T(f \wedge g)$

$\Longrightarrow Tf + Tg = T(f \vee g) + T(f \wedge g)$

$\Longrightarrow Tf + Tg - (Tf \vee T\mathrm{g}) = T(f \wedge g)$

$\Longrightarrow Tf \wedge Tg = T(f \wedge g)$.

ii $\Longrightarrow$ iii $f, g \in E$ ve $f \wedge g = 0$ olsun.

$\Longrightarrow Tf \wedge Tg = T(f \wedge g) = T(0) = 0.$

iii $\Longrightarrow$ iv $f \in E$ olsun. $|f| = f^+ + f^- \Longrightarrow Tf^+ \wedge Tf^- = 0$

$|Tf| = |T||f^+ - f^-| = |Tf^+ - Tf^-| = Tf^+ + Tf^- = T(f^+ + f^-) = T(|f|)$.

iv $\Longrightarrow$ i $f, g \in E$ olsun.

$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ olduğundan

$$T(f \vee g) = \frac{1}{2}(Tf + Tg + T|f - g|)$$

$$= \frac{1}{2}(Tf + Tg + |T(f - g)|)$$

$$= \frac{1}{2}(Tf + Tg + |Tf - Tg)|)$$

$= Tf \vee Tg.$

i $\Longrightarrow$ v $\forall f \in E, T(f^+) = T(f \vee 0) = Tf \vee T0 = Tf \vee 0 = (Tf)^+$.

v $\Longrightarrow$ i olduğunu göstermek için **v $\Longrightarrow$ iv** olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in E$ için $f^- = (-f)^+$ olduğundan

$T(f^-) = T(-f)^+ = (T(-f))^+ = (-Tf)^+ = (Tf)^-$.

$|Tf| = (Tf)^+ + (Tf)^- = T(f^+) + T(f^-) = T(f^+ + f^-) = T(|f|)$.

3. Tanım E ve F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ dönüşümü bir Riesz homomorfizması olsun. Eğer T homomorfizması bire-bir ve örten ise T ye Riesz izomorfizması denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

4. Teorem E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ ye bire-bir ve örten operatör olmak üzere T nin Riesz izomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

İspat: T bir Riesz izomorfizması ise T ve T^{-1} in pozitif olduğu açıktır. O halde $f, g \in E$ keyfi olmak üzere

$f \leq f \vee g \Longrightarrow Tf \leq T(f \vee g)$

$g \leq f \vee g \Longrightarrow Tg \leq T(f \vee g)$

$\Longrightarrow Tf \vee Tg \leq T(f \vee g)$……………..(1)

Benzer şekilde $\forall h, k \in F$ için

$T^{-1}(h) \vee T^{-1}(k) \leq T^{-1}(h \vee g) \Longrightarrow T(f) = h$ ve $T(g) = k, \quad \exists f, g \in E.$

Üstelik T, bire-bir olduğundan f ve g elemanları tektir.

$f \vee g \leq T^{-1}(T(f) \vee T(g))$

$T(f \vee g) \leq T(f) \vee T(g)$…………..(2)

(1) ve (2)' den $T(f \vee g) = T(f) \vee T(g)$.

T, bire-bir ve örten olduğundan T Riesz izomorfizmasıdır.

1.5. İdeal, Solid ve Bant

1. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. $S \subseteq E, g \in E$ ve $f \in S$ olmak üzere,

$|g| \leq |f|$ iken $g \in S$ ise, S ye solid denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

2. Tanım F bir Riesz uzayı ve $E \subseteq F$ olsun. E solid lineer alt uzay ise E ye F de bir ideal denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

3. Sonuç Her (sıra) ideal bir Riesz alt uzayıdır (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

4. Teorem E bir Riesz uzayı olsun. A ve B, E de ideal ise $B \cap A$ ve $A + B, E$ de idealdir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

5. Tanım E bir Riesz uzayı olsun. $x \in E$ vektörü tarafından üretilen ideal
$E_x = \{y \in E : \exists\lambda > 0, |y| \leq \lambda|x|\}$

olarak tanımlanır ve bu ideale bir esas ideal denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

6. Tanım F bir Riesz uzayı ve E, F nin bir ideali olsun. Eğer E nin herhangi bir alt kümesinin F de supremumu mevcut ve bu supremum E nin bir elemanı ise, bir başka deyişle, $D \subseteq E$ ve $f = \sup D$ iken $f \in E$ sağlanıyorsa, E idealine F de bir bant denir (Zaanen, 1975).

7. Teorem E bir Riesz uzayı ve $T: E \to E$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağdaki ifadeler denktir.

i. T bir bant koruyandır.

ii. T nin boştan farklı her D alt kümesi için $T(D^d) \subseteq D^d$.

iii. E de $u \wedge v = 0$ ise $Tu \perp v$ sağlanır.

iv. E de $f \perp g$ $(|f| \wedge |g| = 0)$ise $Tf \perp g$ sağlanır.

v. $\forall f \in E$ için $Tf \in \{f\}^{dd}$ sağlanır.

Eğer yukarıdaki özellikler sağlanırsa $\forall f \in E$ için $|Tf| = |T(|f|)|$ sağlanır (Zaanen, 1983).

İspat: **i⟹ii** D^d bir bant olduğundan açıktır.

ii⟹iii Eğer $u \wedge v = 0$ ise $u \in \{v\}^d$olur. O halde $Tu \in \{v\}^d$sağlanır.

iii⟹iv $f \perp g \Rightarrow f^+ \perp g$ ve $f^- \perp g$

$\Rightarrow f^+ \wedge |\mathrm{g}| = 0$ ve $f^- \wedge |\mathrm{g}| = 0$

$\Rightarrow Tf^+ \wedge |\mathrm{g}| = 0$ ve $Tf^- \wedge |\mathrm{g}| = 0$

$\Rightarrow Tf^+ \perp g$ ve $Tf^- \perp g$

$\Rightarrow Tf^+ \perp g$ ve $Tf^- \perp g$

$\Rightarrow T(f^+ + f^-) \perp g$

$\Rightarrow Tf \perp g.$

iv⟹v $f \perp g \Rightarrow g \in \{f\}^d$

$f \perp g \Rightarrow g \in \{f\}^d$

$\Rightarrow f \in \{f\}^{dd}$

$\Rightarrow Tf \in \{f\}^{dd}.$

v⟹i B, E de bir bant ve $f \in B$ olsun. $Tf \in \{f\}^{dd} \subseteq B$ sağlandığından T bir bant koruyandır.

(i) ve (v) sağlansın ve $f \in E$ olsun. O halde

$f^+ \perp f^- \Rightarrow Tf^+ \perp f^-$

$\Rightarrow Tf^+ \perp Tf^-$

$\Rightarrow |Tf^+ + Tf^-| = |Tf^+ - Tf^-|$

$\Rightarrow |T(f^+ + f^-)| = |T(f^+ - f^-)|$

$\Rightarrow |Tf| = |T(|f|)|.$

8. Tanım E bir Riesz uzayı ve $0 \leq e \in E$ olsun.

i. $I_e = E$ ise e ye güçlü birim denir.

ii. $B_e = E$ ise e ye zayıf birim denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

1.6. Riesz Uzaylarında Otomorfizmalar

Bu kısımda Riesz uzayları üzerinde otomorfizmaların yapısı tanımlanmaya çalışılacak, Archimedean f −cebiri üzerinde tanımlanan otomorfizmalar incelenecek ve Archimedean f −cebiri üzerinde tanımlanan otomorfizmaların değişmeli, birleşmeli ve yarı asal olma durumları ele alınacak ve bazı uzaylar üzerinde tanımlanan otomorfizma örnekleri verilmeye çalışılacaktır.

1. Tanım E bir Riesz uzayı ve $T: E \to E$ bir lineer operatör olsun. Eğer ki $\forall B \subseteq E$ bant için $T(B) \subseteq B$ sağlanıyorsa yani T operatörü E nin bütün bantlarını değişmez bırakıyorsa, T oparatörüne bant koruyan operatör denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

2. Tanım Bant koruyan sıralı sınırlı bir operatöre bir otomorfizma denir. O halde E bir Riesz uzayı ve $T: E \to E$ sınırlı bir operatör olsun. E de $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ sağlanır. Ayrıca T otomorfizması aynı zamanda pozitif ise T ye bir pozitif otomorfizma denir. Başka bir ifade ile, T bir pozitif otomorfizmadır ancak ve ancak E de $x \wedge y = 0$ iken $Tx \wedge y = 0$. E üzerindeki tüm otomorfizmalar kümesi $O(E)$ ile gösterilir, yani

$$O(E) := \{T \in E_b(E) : x \perp y \text{ ise } Tx \perp y\}$$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) .

3. Teorem E Archimedean Riesz uzayı ise, $O(E)$ noktasal ve cebirsel Riesz işlemlerine göre bir Archimedean Riesz uzayıdır. Başka bir ifadeyle, $S, T \in O(E)$ ise $\forall x \in E^+$ için

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x)$$

$$(S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x)$$

(Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

İspat: $T: E \to E$ bir otomorfizma olsun. Yani $T \in O(E)$ olsun. O halde T bant koruyan olduğundan $|T|$ modülüsü vardır ve $\forall x \in E^{+}$ için $|T|(x) = |T(x)|$ sağlanır. Buradan $|T| \in O(E)$ olup $O(E)$ bir Riesz uzayıdır. $S, T \in O(E)$ için

$$S \vee T = \frac{1}{2}(S + T + |S - T|)$$

ve

$$S \wedge T = \frac{1}{2}(S + T - |S - T|)$$

sağlandığından $\forall x \in E^{+}$ için

$$(S \vee T)(x) = \frac{1}{2}((S + T) + \ |S - T|)(x)$$

$$= \frac{1}{2}((S + T)(x) + \ |S - T|(x))$$

$$= \frac{1}{2}((S(x) + T(x)) + \ |S - T|(x)$$

$$= \frac{1}{2}(S(x) + T(x)\ ) + \ |S(x) - T(x)|)$$

$$= S(x) \vee T(x).$$

$$(S \wedge T)(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{S} + T - |S - T|)(x)$$

$$= \frac{1}{2}((\mathrm{S} + T)(x) - |S - T|(x))$$

$$= \frac{1}{2}(S(x) + T(x)\ ) - \ |S - T|(x))$$

$$= \frac{1}{2}(S(x) + T(x)\ ) - \ |S(x) - T(x)|)$$

$$= S(x) \wedge T(x).$$

4. Örnek E boş olmayan X noktalar kümesi üzerinde reel fonksiyonları içeren bir Riesz uzayı olsun (doğal noktasal yapıda sıra yapı ve vektör uzayı yapısı ile) ve buna ilave olarak E yi noktasal çarpıma göre bir cebir olarak ele alalım. $\forall x \in X$ için $e(x) = 1$ özelliğini sağlayan e, E nin bir birim elemanıdır. O halde E, e birim elemanına sahip bir Archimedean $f-$cebiri olur. Bu nedenle E deki bir T dönüşümünün otomorfizma olması için gerek ve yeter şart $\forall f \in E$ için X üzerinde $(Tf)(x) = p(x)f(x)$ denklemini sağlayan bir $p \in E$ nin var olmasıdır. Bu özellik, özellikle, E nin bir X topolojik uzayı üzerinde tüm sürekli reel fonksiyonların uzayı $C(X)$ veya X üzerinde tanımlı tüm sınırlı reel fonksiyonların uzayı $C_b(X)$ olması durumunda da sağlanır (Zaanen, 1975).

5. Teorem E Archimedean Riesz uzayı olsun. Bu durumda $O(E)$ otomorfizmalar uzayı bileşke işlemine göre birim elemanlı bir $f-$cebiridir.

İspat: 1.6.3. Teorem'den $O(E)$ nin bir Riesz uzayı olduğunu biliyoruz.

Şimdi ise $\forall T_1, T_2 \in O(E)$ ve $\forall a \in E$ için $(T_1T_2)(a) = T_1(T_2a)$ bileşke işlemine göre bir Riesz cebiri ve daha sonra bir $f-$cebiri olduğunu gösterelim. $0 \leq T_1, T_2 \in O(E)$ keyfi olsun. $\forall a \in E^+$ için $T_1a \geq 0$ ve $T_2a \geq 0$ olduğunda

$$(T_1T_2)(a) = T_1(T_2a) \geq 0$$

olup $T_1T_2 \in O(E)^+$. Dolayısıyla $O(E)$ Riesz uzayı bir Riesz cebiridir.

Şimdi ise $I: E \to E$ ve $\forall a \in A$ için $I(a) = a$ şeklinde tanımlanan özdeş fonksiyonun $O(E)$ nin bir birim elemanı olduğu açıktır, yani $I \in O(E)$.

Son olarak $O(E)$ nin bir $f-$cebiri olduğunu gösterelim. Bunun için $0 \leq T, T_1, T_2 \in O(E)$ ve $T_1 \wedge T_2 = 0$ olsun. Buradan $TT_1 \wedge T_2 = 0$ ve $T_1T \wedge T_2 = 0$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $a \in E^+$ için

$$T_1a \wedge T_2a = (T_1 \wedge T_2)(a) = 0(a) = 0$$

olduğundan $T_1a \wedge T_2a = 0$ olur. Diğer taraftan

$$T(T_1a) \wedge (T_2a) = 0,$$

$(TT_1)(a) \wedge T_2(a) = 0$

olup $(TT_1 \wedge T_2)(a) = 0$. O halde

$TT_1 \wedge T_2 = 0$ ……………………….(1)

Şimdi ise $T_1T \ \wedge T_2 = 0$ olduğunu gösterelim. Her $a \in E^+$için

$0\leq (T_1T)(a) \ \wedge T_2a = T_1(Ta) \ \wedge T_2a$

$\leq T_1(Ta \vee a) \wedge T_2(Ta \vee a)$

$= (T_1 \wedge T_2)(Ta \vee a) = 0(Ta \vee a) = 0$

$0 \leq (T_1T)(a) \ \wedge T_2a \leq 0$

$(T_1T)(a) \ \wedge T_2a = 0$

$(T_1T \wedge T_2)(a) = 0$

$T_1T \ \wedge T_2 = 0$ ………………………. (2)

(1) ve (2) den $O(E)$ nin bir f −cebiri yapısına sahip olduğu görülür.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Riesz Uzaylarında Biotomorfizmalar

Daha önceki kısımlarda biotomorfizma uzay yapısının oluşturulması için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Bu kısımda ise her bir elemanı E Archimedean vektör uzayı üzerinde tanımlı ve trival olmayan bir biotomorfizmalar uzay yapısının f $-$cebiri yapısına sahip olma durumu incelenecektir.

1.Tanım E bir Archimedean (reel) Riesz uzayı olsun. $T: E \times E \to E$ bilineer dönüşümü E nin her bir bileşeninde bir otomorfizma ise T ye bir biotomorfizma denir. Diğer bir deyişle, $\forall x \in E$ için $T(x,.), T(.,x) \in O(E)$ ise $T: E \times E \to E$ bilineer dönüşümüne E üzerinde bir biotomorfizma denir. E üzerindeki tüm biotomorfizmaların kümesi $O(E,E)$ ile gösterilir.

E üzerinde tanımlanan tüm otomorfizmaların uzayı $O(E)$ olduğu gibi (bkz. 1.6.3. Teorem), $O(E,E)$ biotomorfizmalar uzayının noktasal toplama ve çarpmaya göre Riesz uzayı yapısına sahip olduğu aşağıdaki teoremden açıktır.

2. Teorem E bir Riesz uzayı olsun. Eğer $T \in O(E,E)$ ise T^+, T^-ve $|T| \in O(E,E)$. Özellikle $\forall T, S \in O(E,E)$ ve $(x,y) \in E^+ \times E^+$ için

$$(S \vee T)(x,y) = S(x,y) \vee T(x,y)$$

$$(S \wedge T)(x,y) = S(x,y) \wedge T(x,y)$$

sağlanır (Buskes vd., 2010).

Ayrıca, $O(E,E)$ uzayının cebirsel yapıya sahip olup olamadığı problemi G. Buskes, R. Page ve R. Yilmaz tarafından yayınlanan “A note on bi-orthomorphisms” isimli çalışmada ifade edilmiştir. Bazı kesin koşullar altında buna kısmen de olsa cevap vermelerine rağmen daha genel olarak “Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms” Boulabiar ve Brahmi (2016) başlıklı makalede bu probleme olumlu cevap verilmiştir. Biz burada bu çalışmayı irdeleyeceğiz.

Buskes vd. (2010) daki “A note on bi-orthomorphisms” isimli çalışmada $\forall \pi \in O(E)$ ve $(x, y) \in E \times E$ için

$$\rho(\pi)(x, y) = \pi(xy) = \pi(x)y$$

olarak tanımlanan $\rho: O(E) \rightarrow O(E, E)$ dönüşümü bire-bir bir Riesz homomorfizmasıdır. Çalışmamızın bu kısmında ρ döşümü ile bu dönüşüm kastedilmektedir.

3. Önerme

i. E yarı asal bir f −cebiri ise $O(E)$, $O(E, E)$ da bir Riesz uzayıdır.

ii. E yarı asal Dedekind tam bir f −cebiri ise $O(E)$, $O(E, E)$ da bir sıralı idealdir (Buskes vd., 2010).

İspat: i. E yarı asal bir f −cebiri ve $\pi \in O(E)$ ve $x, y \in E$ olsun. $\rho(\pi) = \pi(x)y$ olarak tanımlanan $\rho: O(E) \rightarrow O(E, E)$ dönüşümü bire-bir bir Riesz homomorfizması olduğundan $O(E, E)$ uzayının bir Riesz uzayı olduğu görülür.

ii. E yarı asal Dedekind tam bir f −cebiri olsun. $T: E \times E \rightarrow E$ sıralı sınırlı varyasyonlu bilineer dönüşüm ve π, $|T| \leq |\rho(\pi)|$ özelliğini sağlayan bir otomorfizma olsun. Buradan $T^+ = \pi' \circ |\rho(\pi)|$ olacak şekilde $\pi' \in O(E)$ vardır ve dolayısıyla

$$\pi' \circ |\rho(\pi)|(x, y) = \pi'(|\pi|(x)y) = \pi'\big(|\pi|(x)\big)y$$

olur. Bu nedenle $T^+ \in \rho(O(E))$ ve benzer şekilde $T^- \in \rho(O(E))$ bulunur. O halde $T = T^+ - T^-$ eşitliğinden $T \in \rho(O(E))$ elde edilir.

4. Lemma $E, (e_\lambda)_\lambda$ yaklaşık birim elemanlı (yani, $(e_\lambda)_\lambda$ yukarı doğru yönlendirilmiş $\forall x \in E^+$ için $\sup_\lambda x e_\lambda = x$ sağlanır) bir Archimedean yarı asal f − cebiri ve $T \in O(E, E)^+$ olsun. $T \in \rho\big(O(E)\big) \Leftrightarrow \forall x \in E^+$için $(T(x, e_\lambda))_\lambda$ ağının E de bir supremuma sahip olmasıdır (Benamor, 2014).

İspat: $\Rightarrow T \in \rho\big(O(E)\big)$ ve $T = \rho(\pi)$ olmak üzere $\pi \in O(E)^+$ olsun. $\forall x \in E^+$ için $T(x, e_\lambda) = \pi(x)e_\lambda \uparrow \pi(x)$ olur.

$\Leftarrow$; $\forall x \in E^+$için $(T(x, e_\lambda))_\lambda$ ağının E de bir supremuma sahip olduğunu kabul edelim. $\forall x \in E^+$ için $\pi(x) = \sup_\lambda T(x, e_\lambda)$ ile tanımlanan $\pi: E^+ \to E^+$ dönüşümü toplamsaldır. Riesz Kantorovich Teoremi Aliprantis ve Burkinshaw (2006) dan π nin $T = \rho(\pi)$ özelliğini sağlayan ve tekrar π ile gösterilen bir pozitif otomorfizma genişlemesi mevcuttur.

5.Teorem E Dedekind tam yarı asal bir f −cebiri olsun. $\rho\big(O(E)\big)$, $O(E, E)$ da bir sıralı idealdir (Benamor, 2014).

İspat: $T \in O(E, E)$ ve $\pi \in O(E)^+$: $0 \leq T \leq \rho(\pi)$ olsun. Buradan $\forall x \in E^+$ ve $\forall\lambda$ için $0 \leq T(x, e_\lambda) \leq \pi(x)e_\lambda \leq \pi(x)$, yani $\forall x \in E^+$ için $(T(x, e_\lambda))_\lambda$ ağı E de üstten sınırlıdır. Fakat E Dedekind tam olduğundan $\forall x \in E^+$ için$(T(x, e_\lambda))_\lambda$ E de bir supremumu vardır. O halde 2.1.4. Lemmadan $T \in \rho\big(O(E)\big)$ olup ispat tamamlanır.

6. Örnek $E := C([0,1])$ olsun. $x, y \in E$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $(x * y)(t) = tx(t)y(t)$ ile tanımlanan $*$ çarpma işlemine göre E bir f − cebiridir. Buradan $(x, y) \to xy$ doğal çarpım $O(E, E)$ de fakat $\rho\big(O(E)\big)$ de bulunmaz (Buskes vd., 2010). Gerçekten, $\rho: O(E) \to O(E, E)$ örten değildir. Gerçekten; ρ örten olduğunu kabul edelim, yani $\forall T \in O(E, E)$ için $T = \rho(\pi)$ olacak şekilde bir $\pi \in O(E)$ olsun. Buradan. Her $x, y \in E$ için

$$T\,(x, y) = \rho(\pi)(x, y) = \pi(x) * y \in (E,*)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in [0,1] \text{ için } T\,(x, y)(t) = \big((\pi x) * y\big)(t) = t(\pi x \cdot y)(t) = t(\pi x)(t) \cdot y(t).$$

$$T\,(x, y)(t) = (x. y)(t) = x(t)y(t)$$

olduğundan $x(t)y(t) = t(\pi x)(t). y(t)$ ve dolayısıyla $x(t) = t(\pi x)(t)$ elde edilir. Özel olarak, $x = e$ olarak alınırsa $\forall t \in [0,1]$ için $e(t) = 1$ şekilinde tanımlanan $e: [0,1] \to \mathbb{R}$ birim fonksiyon olmak üzere $\forall t \neq 0$ için $(\pi e)(t) = \frac{1}{t}$ ise $\pi(e) \notin E$. Çünkü $\pi(e): [0,1] \to \mathbb{R}$ $t = 0$ da sürekli değildir. Bu ise $\pi(e) \in E$ olmasıyla çelişir. O halde ρ örten değildir.

2.2. Biotomorfizmalar Uzayının Çarpımsal Yapısı

Bu kısımda bir biotomorfizma uzayının cebirsel yapısı incelenerek bu uzayın bir f −cebir yapısına sahip olduğu araştırılacaktır.

1. Teorem E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Eğer $e \in E^+$ ise $\forall x, y \in E$ ve $A, B \in O(E,E)$ için $(A *_e B)(x,y) = A(x, B(e,y))$ şeklinde tanımlanan çarpım işlemine göre $O(E,E)$ bir Archimedean f −cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $e \in E^+$ ve $A, B \in O(E,E)$ ise $\forall x, y \in E$ için

$$(A *_e B)(x,y) = A(x, B(e,y))$$

olarak tanımlanan $A *_e B: E \times E \to E$ dönüşümü bilineer olduğu açıktır. Üstelik, eğer $x \in E$ ise

$$(A *_e B)(x,.) = A(x, B(e,.)) \in O(E)$$

ve

$$(A *_e B)(.,x) = A\big(., B(e,x)\big) \in O(E).$$

$$\Longrightarrow A *_e B \in O(E,E).$$

Bununla birlikte $\forall A, B \in O(E,E)$ için

$$T_e(A,B) = A *_e B$$

ile tanımlanan $T_e: O(E,E) \times O(E,E) \to O(E,E)$ dönüşümü bir pozitif bilineer dönüşümdür. Diğer yandan eğer $A, B, C \in O(E,E)$ ise $\forall x, y \in E$ için

$$((A *_e B) *_e C)(x,y) = (A *_e B)(x, C(e,y)) = A(x, B(e, C(e,y)))$$

$$= A\big(x, (B *_e C)(e,y)\big) = A *_e (B *_e C)(x,y).$$

Böylece $(O(E,E), *_e)$ Riesz uzayı bir Riesz cebirdir. Hatta biotomorfizmalar simetrik olduğundan $O(E,E)$ aynı zamanda değişme özelliğine sahiptir.

Şimdi $A, B \in O(E,E)$ öyleki $A \wedge B = 0$ olsun. $\forall\, 0 \leq C \in O(E,E)$ için

$$(A *_e C) \wedge B = (C *_e A) \wedge B = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Fakat $(O(E,E),\ *_e)$ değişmeli olduğundan sadece $(A *_e C) \wedge B = 0$ olduğunu ispatlamak yeter. Bunun için $x, y \in E^+$ keyfi olsun. $O(E,E)$ uzayı üzerindeki latis işlemleri noktasal olduğundan

$$A(x,y) \wedge B(x,y) = 0$$

ve dolayısıyla, $C(e,.) \in O(E)$ olduğundan

$$C(e, A(x,y)) \wedge B(x,y) = 0.$$

Ancak biotomorfizmaların simetrik olduğunu kullanılarak

$$C\big(e, A(x,y)\big) = C\big(x, A(e,y)\big) = (C *_e A)(x,y).$$

$$\Longrightarrow C(e, A(x,y)) \wedge B(x,y) = 0.$$

$\Longrightarrow (C *_e A) \wedge B = 0$ elde edilir.

2. Notasyon $\forall A \in O(E,E)$ için $K(A) := \{x \in E : A(x,x) = 0\}$.

3. Lemma E bir Archimedean Riesz uzayı ve $A \in O(E,E)$ olsun.

$$K(A) = \{x \in E : A(x,y) = 0, \forall y \in E\}.$$

Özellikle $K(A), E$ de sıralı bir idealdir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $x \in K(A)$ ve $y \in E$ olsun. $u = |x|$ ve $v = |y|$ alalım. $\forall x \in E$ için

$$A(x,x) = 0 \text{ ve } A(x,x) = A(|x|,|x|)$$

olduğundan

$$A^+(u,u) = A^+(x,x) = A^-(x,x) = A^-(u,u)$$

olur. Böylece

$$A^{+}(u,u) = A^{+}(u,u) \wedge A^{-}(u,u) = (A^{+} \wedge A^{-})(u,u) = 0$$

bulunur. Bu nedenle $A^{+}(u,u) = A^{-}(u,u) = 0$ olur.

Şimdi $A^{+}(u,v) = 0$ olduğunu gösterelim. $\forall n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ için

$$0 \leq A^{+}(nu - v, nu - v)$$

$$= n^2 A^{+}(u,u) - 2nA^{+}(u,v) + A^{+}(v,v)$$

$$= A^{+}(v,v) - 2nA^{+}(u,v).$$

$$\Longrightarrow 0 \leq 2nA^{+}(u,v) \leq A^{+}(v,v).$$

E bir Archimedean olduğundan $A^{+}(u,v) = 0$ sonucuna ulaşırız. $O(E,E)$ nin latis işlemleri kullanılarak

$$|A^{+}(x,y)| = A^{+}(u,v) = 0$$

bulunur. Buradan $A^{+}(x,y) = 0$ olur.

$$A^{+}(u,u) = A^{+}(x,x) = A^{-}(x,x) = A^{-}(u,u)$$

eşitliğinden $A^{-}(x,y) = 0$ bulunur.

$$A(x,y) = A^{+}(x,y) + A^{-}(x,y) = 0$$

ve dolayısıyla $A(x,y) = 0$ elde edilir.

Şimdi ise $K(A)$ nın E de sıralı bir ideal olduğunu gösterelim. İlk kısımdan $K(A)$ nın E nin bir alt vektör uzayı olduğu açıktır. Dahası $\forall x \in X$ için

$$A(x,x) = 0 \text{ ve } A(x,x) = A(|x|,|x|)$$

olduğundan $K(A)$ E nin bir alt vektör uzayıdır. $K(A)$ nın E de solid olduğunu gösterelim.

$y \in K(A)$ ve $0 \leq y \leq x$ özelliklerini sağlayacak şekilde $x, y \in E$ olsun. $A(x,.) \in O(X)$ olduğundan E üzerinde ayrık koruyan sıralı sınırlı bir operatördür. Huijsmans ve De Pagter (1993) den

$0 \leq |A(x,x)| \leq |A(x,y)| = 0.$

4. Lemma E bir Archimedean Riesz uzayı ve $A \in O(E,E)$ olsun. Eğer $x \in E$ ise $A(x,x) = 0 \Leftrightarrow A(x,x) \in K(A)$ (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $\Longrightarrow$ $x \in E$ için $\mathrm{A}(x,x) = 0$ ise açıkça $0 \in K(A)$ olduğundan $A(x,x) \in K(A)$.

$K(A) = \{x \in E : A(x,y) = 0, \forall y \in E\}$. $A(x,x) \in K(A)$ olsun. x ve A nın pozitif olduğunu kabul edebiliriz. Bu nedenle eğer $n \in \{1,2,3, \dots\}$ ise

$(nA(x,x) - x)^+ \wedge (nx - n^2 A(x,x))^+ = 0.$

$A(x,.) \in O(X)$ olduğundan

$(nA(x,x) - x)^+ \wedge A(x,(nx - n^2 A(x,x)^+) = 0.$

Böylece yukarıdaki lemmadan $A\big(x, A(x,x)\big) = 0$. Dolayısıyla

$(nA(x,x) - x)^+ = (nA(x,x) - x)^+ \wedge nA(x,x)$

$= (nA(x,x) - x)^+ \wedge nA(x,x)^+$

$= (nA(x,x) - x)^+ \wedge (A\big(x, nx - n^2 A(x,x)\big))^+$
$= (nA(x,x) - x)^+ \wedge A\left(x, \big(nx - n^2 A(x,x)\big)^+\right) = 0,$

yani $0 \leq nA(x,x) \leq x$ elde edilir ki E Archimedean olduğundan $A(x,x) = 0$ olur.

5. Sonuç E**,** $e > 0$ sıralı zayıf birimli bir Archimedean Riesz uzayı olsun. O halde $O(E,E)$ de tanımlanan $*$ çarpımına göre yarı asal bir $f-$cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $(O(E,E),\ *_e)$ bir f $-$cebir yapısına sahip olduğunu biliyoruz. Şimdi bunun yarı asal olduğunu gösterelim. Bunun için $T \in O(E,E)$ olmak üzere $T *_e T = 0$ olsun. Buradan $\forall x, y \in E$ için

$$(T *_e T)(x,y) = T\big(x, T(e,y)\big) = 0,$$

yani, $\forall y \in E$ için $T(e,y) \in K(T)$. 2.2.3. Lemmadan $\forall y \in E$ için $T(e,y) = 0$. Fakat e bir sıralı zayıf birim ve $T(.,y) \in O(E)$ olduğundan $\forall y \in E$ için $T(.,y) = 0$ (Zanaan, 1983). Buradan $T = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(O(E,E),\ *_e)$ yarı asal bir f $-$cebiri olur.

6. Teorem E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. $O(E,E) \neq \{0\}$.

ii. $O(E,E)$ trivialden farklı bir f $-$cebiridir

iii. E trivialden farklı bir f $-$cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: i⟹ii $O(E,E)$ de f $-$cebiri çarpımının trivial olduğunu kabul edelim ve $x \in E^+$ olsun. Teorem 2.2.1 de gösterildiği gibi, $*_x$ işlemi $O(E,E)$de bir f $-$cebiri çarpımıdır, $(O(E,E),\ *_x)$ bir f $-$cebiridir. Bu nedenle $\forall T \in O(E,E)$ için hipotezden $T *_x T = 0$ olur. Şimdi bir $T \in O(E,E)$ için

$$T\big(T(x,x), T(x,x)\big) = (T *_x T)(T(x,x), x) = 0$$

olduğundan $T(x,x) \in K(T)$. Buradan 2.2.3. Lemma ve 2.2.4. Lemmadan $T = 0$ elde edilir ki bu $O(E,E) = \{0\}$ olması demektir. Bu ise hipotezle ile çelişir. O halde $O(E,E)$ trivialden farklı bir f $-$cebiridir.

ii⟹iii $O(E,E)$ trivialden farklı bir Riesz uzayı olduğundan $T \neq 0$ olacak şekilde bir $0 \leq T \in O(E,E)$ bulunur. Fakat E de $\forall x, y \in E$ için

$$xy = T(x,y)$$

olarak tanımlanan çarpım işlemine göre E trivialden farklı bir f −cebiri olur. Gerçekten, eğer $\forall x, y, z \in E$ için

$$x(yz) = T\big(x, T(y, z)\big) = T(T(x, y), z) = (xy)z,$$

yani yukarıda tanımlanan çarpım birleşmelidir. Benzer şekilde bir f −cebirinin diğer cebirsel özelliklerinin sağlandığı gösterilebilir.

iii⟹i E trivialden farklı bir $f-$ cebiri olsun. $\forall x, y \in E$ için $T(x, y) = xy$ olarak tanımlanan $T: E \times E \to E$ dönüşümü E üzerinde trivialden farklı bir biotomorfizma olduğunu göstermek kolaydır. Bu sonuç teoremin ispatını tamamlar.

Aşağıdaki örnekte verildiği gibi, yukarıdaki teoreme rağmen, sadece sıfır biotomorfizmaya sahip Riesz uzayları mevcuttur. Örneği vermeden önce aşağıdaki teoreme ihtiyacımız vardır.

7. Teorem E , $[a, b]$ üzerinde tanımlı bütün reel değerli noktasal lineer sürekli fonksiyonların oluşturduğu Riesz uzayı ise E sadece trivial otomorfizmaya sahiptir, yani $O(E) = \{0\}$ (Zaanen, 1975).

8. Örnek E , $[0,1]$ üzerinde tanımlı bütün reel değerli noktasal lineer sürekli fonksiyonların oluşturduğu bir Archimedean Riesz uzayı olsun. I, E kümesi üzerinde tanımlı özdeş operatörü olmak üzere, yukarıdaki teoremden

$$O(E) = \{rI : r \in (-\infty, \infty)\}$$

olduğu görülür. Şimdi eğer $T \in O(E, E)$, $x \in E$ ise $T(x, .) = r_x I$ özelliğini sağlayan bir $r_x \in (-\infty, \infty)$ vardır. 0≠ $x \in E$ ve $y \in E$ elemanları lineer bağımsız ise

$$r_x y = T(x, .)(y) = T(x, y) = T(y, x) = r_y x$$

olduğundan $r_x = 0$ olduğu görülür. Buradan $T(x, .) = 0$ elde edilir ki bu 0, E üzerindeki tek biotomorfizma, yani, $O(E, E) = \{0\}$ olması demektir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

2.3. Otomorfizmaların Biotomorfizmaların İçine Yerleştirilmesi

Bu kısımda otomorfizmalar uzayının biotomorfizmalar uzayın içine sıralı ideal olarak yerleştirilmesi için gerekli özellikler araştırılacaktır. Dedekind tam durumu için Buskes vd. (2010) çalışmada bu durum incelenmiştir. Burada Boulabiar ve Brahmi (2016) tarafından gösteri teorisi kullanılarak genelleştirilen E zayıf sıra birimli düzgün tam yarı asal $f-$cebir olması durumunda $O(E)$ uzayının yine $O(E,E)$ de bir sıralı ideal olduğu incelenecektir.

E yarı asal bir f $-$cebiri olsun. Eğer $T \in O(E)$ ise $\forall \pi \in O(E)$ ve $(x,y) \in E \times E$ için

$$\rho(\pi)(x,y) = \pi(xy) = \pi(x)y$$

olduğundan $\forall x,y \in E$ için
$$xT(y) = T(xy) = yT(x)$$

olduğu görülür. Üstelik, $T \in O(E)$ olmak üzere $\forall x,y \in E$ için

$$\hat{T}(x,y) = T(xy) = T(x)y$$

şeklinde tanımalan $\hat{T}: E \times E \to E$ dönüşümü bir biotomorfizma, yani $\hat{T} \in O(E,E)$. Dolayısıyla $\forall T \in O(E)$ için

$$\rho(T) = \hat{T}$$

olarak tanımlanan $\rho: O(E) \to O(E,E)$ dönüşümünün bire-bir bir Riesz homomorfizmasıdır (Buskes vd, 2010). Buna göre $O(E)$, bir Riesz alt uzayı olarak, $O(E,E)$ nın içine yerleştirilebilir. O halde herhangi bir $T \in O(E)$, görüntüsü olan $\hat{T} \in O(E,E)$ ile belirlenebilir.

Şimdi E düzgün tam yarı asal bir f $-$cebir ve

$$E^{\odot} = \{xy: x,y \in E\}$$

olarak alınırsa bu $E^{\odot}$ kümesi $\{xx = x^2: x \in E\}$ pozitif konuna sahip E uzayunun bir Riesz alt uzayıdır (Buskes ve Rooıj, 2000). Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

1. Teorem E düzgün tam yarı asal f −cebiri ve $T: E \times E \to E$ bir dönüşüm olsun. T, E üzerinde (pozitif) bir biotomorfizmadır ⇔ $\forall x, y \in E$ için $T(x, y) = T^{\odot}(xy)$ özelliğini sağlayan tek bir $T^{\odot}: E^{\odot} \to E$ (pozitif) biotomorfizma vardır (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: ⟹ Açıktır.

⟸ İlk olarak T nin E üzerinde pozitif bir biotomorfizma ise T ortosimetrik bir Riesz bimorfizmadır. $\forall x, y \in E$ için

$$\odot\,(x, y) = xy$$

olarak tanımlanan $\odot: E \times E \to E$ ortosimetrik Riesz bimorfizması ve $(E^{\odot},\odot)$ ikilisi bir Riesz uzayı olup Enin karesidir (Buskes and Rooij, 2000). Dolayısıyla $\forall x, y \in E$ için

$$T(x, y) = T^{\odot}(xy)$$

olarak tanımlanan tek bir $T^{\odot}: E^{\odot} \to E$ Riesz homomorfizması vardır. Üstelik $T^{\odot}$ bir otomorfizmadır. Gerçekten $x \in E$ ve $v \in E^{\odot}$ öyleki $|x| \wedge |v| = 0$ olsun. T ortosimetrik olduğundan $T(x, v) = 0$. Diğer yandan $E^{\odot}$ tanımdan $v \in E^{\odot}$ için $v = yz$ özelliği sağlayan$y, z \in E$ vardır. Buradan $\forall \pi \in O(E)$ ve $(x, y) \in E \times E$ için

$$\rho(\pi)(x, y) = \pi(xy) = \pi(x)y$$

olduğundan $T \in O(E, E)$ için

$$xT(y, z) = T(xy, z) = yT(x, z) = T(x, yz) = T(x, v) = 0.$$

Fakat E yarı asal olduğundan

$$|x| \wedge \left|T^{\odot}(v)\right| = |x| \wedge \left|T^{\odot}(yz)\right| = |x| \wedge |T(y, z)| = 0$$

bulunur. Bu ise $T^{\odot}$ operatorünün pozitif bir otomorfizma olduğunu gösterir.

Şimdi $T \in O(E, E)$ keyfi olması durumunda $T^{\odot} \in O(E)$ olduğunu gösterelim. $O(E, E)$ bir Riesz uzayı olduğundan $T = B - C$ olacak şekilde pozitif B, $C \in O(E, E)$ vardır. O halde yukarıdaki pozitiflik durum kullanılarak, $\forall x, y \in E$ için

$B(x, y) = B^{\odot}(xy)$ ve $C(x, y) = C^{\odot}(xy)$ olacak şekilde, sırasıyla,

$B^{\odot}: E^{\odot} \to E$ ve $C^{\odot}: E^{\odot} \to E$ otomorfizma vardır. Buradan açıkça $B^{\odot} - C^{\odot} \in O(E)$. Fakat $\forall x, y \in E$ için

$T^{\odot}(xy) = T(x,y) = B(x,y) - C(x,y) = B^{\odot}(xy) - C^{\odot}(xy) = (B^{\odot} - C^{\odot})(xy)$,

yani $\forall v \in E^{\odot}$ için $T^{\odot}(v) = \left(B^{\odot} - C^{\odot}\right)(v)$ olduğundan $T^{\odot} = B^{\odot} - C^{\odot} \in O(E)$. Dolayısıyla $T^{\odot} \in O(E)$ elde edilir.

Aşağıdaki sonuç G. Buskes, R. Page ve R. Yilmaz tarafından (Buskes vd., 2010) ispatlanmıştır. Burada Boulabiar ve Brahmi (2016) çalışmasındaki alternatif ispatı vereceğiz.

2. Sonuç E Dedekind tam yarı asal f −cebiri olsun. $O(E)$, $O(E,E)$ nin bir sıralı idealidir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $O(E)$, $O(E,E)$ in bir Riesz alt uzayı olduğundan $O(E)$ in $O(E,E)$ de bir solid olduğunu göstermek teoremin ispatı için yeterlidir. Bunun için $T \in O(E,E)$ olsun. O halde $0 \leq T \leq f$ eşitsiliğini sağlayan bir $f \in O(E)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $T \in O(E)$ olduğunu göstermeliyiz. E düzgün tam olduğundan yukarıdaki teoremden $\forall x,y \in E$ için $T(x,y) = T^{\odot}(xy)$ özelliğini sağlayan tek bir $T^{\odot}: E^{\odot} \rightarrow E$ pozitif otomorfizması mevcuttur. O halde

$0 \leq T^{\odot}(x^2) = T(x,x) \leq f(x^2)$

sağlanır. Diğer bir deyişle $\forall 0 \leq v \in X^{\odot}$ için

$0 \leq T^{\odot}(v) \leq f(v)$

bulunur. Buradan 2.3.1. Teorem $T^{\odot}$ operatörünün, tekrar $T^{\odot}$ ile gösterebileceğimiz, $0 \leq T^{\odot} \leq f$

özelliğini sağlayan ve tekrar $T^{\odot}$ ile gösterilen bir pozitif operatöre genişlemesi vardır. Buradan $T^{\odot} \in O(E)$ ve $\widehat{T^{\odot}} = T$ elde edilir. Sonuç olarak $T \in O(E)$ bulunur. Bu ise $O(E)$ in $O(E,E)$ de bir solid ve dolayısıyla sıralı ideal olduğunu ispatlar.

3. Teorem E Riesz uzayı düzgün tam ise $O(E,E)$ de düzgün tamdır (Boulabiar and Brahmi, 2016).

İspat: Şimdi $T: E^{+} \rightarrow E^{+}$, $\forall x,y \in E^{+}$ için

$T(x,y) = f_x(y)$

olarak tanımlayalım. Riesz Kantorovich Teoreminden f_x in T ile ifade edilen,

$E \times E \to E$ tek olarak genişlemesi vardır. Burada $T \in O(E,E)$ olduğu ve (T_n) Cauchy dizisinin de düzgün limiti olduğu görülür. Böylece $O(E,E)$ tamdır. Özellikle E düzgün tam ise $O(E)$ düzgün tamdır (Zaanen,1983).

Şimdi $(A_n) \subseteq O(E,E)$ herhangi bir düzgün Cauchy dizisi olsun. Buradan

$\exists S \in (O(E,E))^+$ öyleki $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall p,q \geq N_\varepsilon$ için

$|T_p - T_q| \leq \varepsilon S.$

Buradan $O(E)$ de $\forall x \in E^+$ ve $\forall p,q \geq N_\varepsilon$ için

$|T_p(x,.) - T_q(x,.)| \leq \varepsilon S(x,.)$

sağlanır. Bu ise $\{T_n(x,.)\} \subseteq O(E)$ bir düzgün Cauchy dizisi olması demektir. Fakat $O(E)$ düzgün tam olduğundan bu dizi bir $f_x \in O(E)$ ye yakınsar. Diğer taraftan biotomorfizmaların simetri olmasından $\forall x,y \in E^+$ için $f_x(y) = f_y(x)$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall x,y \in E^+$ için

$T(x,y) = f_x(y)$

şeklinde bir $T: E^+ \times E^+ \to E^+$ dönüşümü tanımlansın. Buradan standart genişleme teoreminden Aliprantis ve Burkinshaw (2006) dan f tek olarak $E \times E$ den E ye bir bilineer dönüşüme genişler. Bu genişleme dönüşümü tekrar T ile gösterilirse, T nin $\{T_n\}$ dizisinin düzgün limiti olduğu görülür. Dolayısıyla $O(E,E)$ düzgün tamdır.

Şimdi bu bölümün ana sonucunu vermeye hazırız.

4. Teorem E zayıf sıra birimli düzgün tam yarı asal f −cebiri ise $O(E)$, $O(E,E)$ de bir sıralı idealdir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: Yukarıdaki teoremden $O(E,E)$ nın düzgün tam yarı asal f −cebiridir. Şimdi

$e \in E$ pozitif zayıf sıra birim olsun. 2.2.5. Sonuçtan $(O(E,E), *_e)$ bir yarı asal f −cebiridir. $O(E)$ in $((E,E), *_e)$ de bir halka ideali olduğunu gösterelim. Bunuın için $f \in O(E)$ ve $T \in O(E,E)$ keyfi olsun. Buradan $f o T(e,.) \in O(E)$ ve $\forall x,y \in E$ için

$xf(y) = f(xy) = yf(x)$

olduğundan,

$(\hat{f} *_e T)(x,y) = \hat{f}(x, T(e,y))$

$$= f\big(xT(e,y)\big) = xf\big(T(e,y)\big)$$

$$= x(f\text{o}T(e,.))(y)$$

$$= f\text{o}\widehat{T(e,.})(x,y)$$

sağlanır. Buradan $\hat{f} *_e T = f\text{o}\widehat{T(e,.)} \in O(E)$ elde edilir. Bu ise $O(E)$ in $O(E,E)$ de bir halka ideali oluğunu gösterir. Diğer yandan $O(E)$ birim elemanlı düzgün tam $f-$ cebiri olduğundan $O(E)$ karekök kapalıdır. Dolayısıyla, 1.3.16. Teorem gözönüne alınırsa, $O(E)$ halka ideali aynı zamanda bir sıralı idealdir. Buradan $O(E)$ in $O(E,E)$ de bir sıralı ideal olduğu sonucuna ulaşılır.

3. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu çalışmada Riesz uzayları üzerinde bir biotomorfizma yapısının oluşturulabilmesi için yeterli ve gerekli koşullar verilmiş ve biotomorfizmaların tanımlanan bir çarpıma göre çarpımsal yapıları incelenmiştir. Buna göre aşağıdaki temel sonuçlar verilebilir.

1. E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Eğer $e \in E^+$ ise $\forall x, y \in$ ve $A, B \in O(E,E)$ için $(A *_e B)(x,y) = A(x, B(e,y))$ şeklinde tanımlanan çarpımına işlemine göre $O(E,E)$ bir Archimedean f −cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

2. E**,** $e > 0$ sıralı zayıf birimli Archimedean bir vektör Riesz uzayı olsun. O halde $O(E,E)$ tanımlanan * çarpımına göre yarı asal bir f −cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

3. E bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Aşağıdaki eşitlikler birbirine

denktir.

i. $O(E,E) \neq \{0\}$.

ii. $O(E,E)$ trivialden farklı bir f −cebiridir

iii. E trivialden farklı bir f −cebiridir. (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

4. E zayıf sıra birimli düzgün tam yarı asal f −cebiri ise $O(E)$, $O(E,E)$ de bir sıralı idealdir. (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

5. E düzgün tam yarı asal f −cebiri ve $T: E \times E \to E$ bir dönüşüm olsun.

T, E üzerinde (pozitif) bir biotomorfizmadır ⇔ $\forall x, y \in E$ için $T(x,y) = T^{\odot}(xy)$ özelliğini sağlayan tek bir $T^{\odot}: E^{\odot} \to E$ (pozitif) biotomorfizma vardır (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

4. ÖNERİLER

Bir biotomorfizma yapısı için öne sürülen tanım, öneri ve teoremlerin tamamı " n -otomorfizma" yapıları için çalışılabilir ve bu " n -otomorfizma" yapıları $O(E, E, \ldots, E)$ olarak tanımlanabilir. Buna ilave olarak çalışmada yer alan ve f $-$cebiri tanımının kullanıldığı tüm öneri ve teoremler d $-$cebiri, ve hemen hemen f $-$cebiri yapıları için çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O., 2006. Pozitif Operators. Springer, Dardrecth.

Amemiya, I., 1953. A general spectral theory in semi-ordered linear spaces. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 12, 111-156.

Birkhoff, G. and Pierce, R. S., 1956. Lattice-ordered rings. An. Acad. Brasil. Cienc., 28, 41-49.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 25, Providence, RI. MR 37 2638.

Benamor, F ., 2014. On bi-orthomorphisms on a semiprime $f-$algebra. Indag. Math., 25, 44-48.

Bernau, S. J. and Huijsmans, C. D., 1990. Almost $f-$algebras and $d-$algebras. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107, 287-308.

Beukers, F., Huijsmans, C.B. and De Pagter, B., 1983. Unital embedding and complexification of $f-$algebras, Math. Z., 183, 131–144.

Boulabiar, K., 2002. Some aspects of Riesz multımorphisms. Indag. Mathem., N.S., 13 (4), 419-432.

Boulabiar, K. and Brahmi, W., 2016. Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms. Indag. Mathem, 13 (3), 786–798.

Buskes, G., Page, R. and Yilmaz, R., 2010. A note on bi-orthomorphisms. Vector Measures, Integration and Related Topics, Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 201, Birkhauser, Basel, 99–10.

Buskes, G. and Rooij, A., 2000. Almost $f-$algebras: Structure and the Dedekind completion. Positivity 4, 233–243.

Buskes, G. and Rooij, A., 2001. Squares of Riesz spaces. Rocky Mountain J. Math, 31, 45–56.

Buskes, G., Rooij, A. and De Pagter, B., 1991. Functional calculus on Riesz spaces. Indag. Mathem., N.S., 2(4), 423–426.

De Pagter, B. 1981. $f-$ algebras and orthomorphisms. Phd. Thesis, University of Leidin.

Fremlin, D. H., 1972. Tensor products of Archimedean vector lattices. Amer. J. Math., 94, 778-798.

Huijsmans, C.B., 1991. Lattice ordered algebras and $f-$algebras: A survey. Studies in Ekonomic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics (C. D.

Aliptantis, K. C. Border and W. A. J. LuAemburg, eds.) Spinger, Berlin, 151-169.

Huijsmans, C. B. and De Pagter, B., 1982. Ideal theory in f −algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 269, 225–245.

Kudlacek, V., 1962. On some types of l −rings. Sborni Vysokeho Uceni Techn v Brne, 1-2, 179-181.

Kusraev, A. G. and Tabuev, S. N., 2008. Multiplicative representatıon of bilinear operators. Siberian Mathematical Journal, 49 (2), 287-294.

Kusraev, A. G. and Tabuev, S. N., 2004. On disjointness preserving bilinear operators. Vladikavkazsk. Mat. Zh., 6 (1), 58-70.

Luxsemburg, W. A .J. and Zaanen, A. C., 1971. Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam.

Luxsemburg, W. A. J. and Schep, A. R., 1979. An extension theorem for Riesz homomorphisms. Indag. Math., 41, 145-154.

Nakano, H., 1950. Modern Spectral Theory. Tokyo Math. Book Series II, Maruzen, Tokyo.

Yılmaz, R., 2001. On lattice ordered algebras. Ph. D. Thesis, University of Wales.

Zaanen, A. C., 1975. Examples of orthomorphisms. J. Approximation Theory 13, 192-204.

Zaanen, A. C., 1983. Riesz Spaces II. North-Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim GÖKCAN, 03/04/1985 tarihinde Kütahya'da doğdu. İlköğretimini 2000 yılında Tavşanlı ilçesinde Fatih İlköğretim Okulu'nda ve Ortaöğretimini 2004 yılında Tavşanlı ilçesinde Tavşanlı Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 06/09/2004 tarihinde başladığı lisans eğitimini 09/06/2008 tarihinde Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamamladı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini halen devam ettirmektedir. Artvin Çoruh Üniversitesi Kurumunda Bilgisayar İşletmeni olarak 2011 yılı itibariyle görev yapmaktadır. İyi seviyede İngilizce bilen İbrahim GÖKCAN, evli ve 2 çocuk babasıdır.