KOMPLEKS FOURİER SERİSİ

Euler formülünü kullanarak sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını eksponansiyel olarak yazabiliriz.

$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ $\qquad$ $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

$\cos(x) = \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)/2$ $\qquad$ $\sin(x) = \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)/2i$

Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal sayıdır ve $1/i = -i$ olur.

Bunları Fourier serisine yerleştirelim.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{a_n}{2}e^{-i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{b_n}{2i}e^{i\frac{n\pi}{L}x} - \frac{b_n}{2i}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right)e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

Serinin katsayılarını yeniden tanımlayalım.

$c_0 = a_0/2$ $\qquad$ $c_n = (a_n - ib_n)/2$ $\qquad$ $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

Bütün fonksiyonu $[-\infty, \infty]$ aralığında bir toplam olarak yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

Buradaki c_n katsayıları artık kompleks sayıdır. Eğer $f(x)$ bir reel fonksiyonsa, $c_{-n} = (c_n)^*$ olarak kompleks eşlenik olmalıdır.

ORTOGONALLİK

Bir periyot üzerinde iki eksponansiyel fonksiyon için diklik bağıntısı yazılabilir. Fakat kompleks fonksiyonlarda soldaki fonksiyonun kompleks eşleniği alınmalıdır.

$$\int_{-L}^{L} \big(g(x)\big)^* f(x)\, dx = \int_{-L}^{L} \left(e^{i\frac{m\pi}{L}x} \right)^* e^{i\frac{n\pi}{L}x}\, dx = \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{m\pi}{L}x}\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\, dx = 2L\, \delta_{mn}$$

Bu integralleri hesaplayalım.

$m \neq n$ için

$$\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{m\pi}{L}x}\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\, dx = \int_{-L}^{L} e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}x}\, dx = \left[\frac{e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}x}}{i(n-m)\frac{\pi}{L}} \right]_{-L}^{L} = \frac{e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}L}}{i(n-m)\frac{\pi}{L}} - \frac{e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}(-L)}}{i(n-m)\frac{\pi}{L}}$$

$$= \frac{e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi}}{i(n-m)\frac{\pi}{L}} = \frac{2i\sin\big((n-m)\pi\big)}{i(n-m)\frac{\pi}{L}} = 0$$

Burada $n \neq m$ ve $k = n - m$tamsayıları için $\sin\big((n-m)\pi\big) = \sin(k\pi) = 0$ olur.

$m = n$ için,

$$\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, e^{i\frac{n\pi}{L}x}\, dx = \int_{-L}^{L} e^{0}\, dx = \int_{-L}^{L} dx = [x]_{-L}^{L} = \big(L - (-L)\big) = 2L$$

Artık c_n katsayılarını integralle bulabiliriz.

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\, dx$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun kompleks Fourier serisiyle açıımını yazmak için yukarıdaki integralle c_n kompleks katsayıları hesaplanır ve istenilen sayıda terim yazılır. Özetle kompleks Fourier serisi şöyledir.

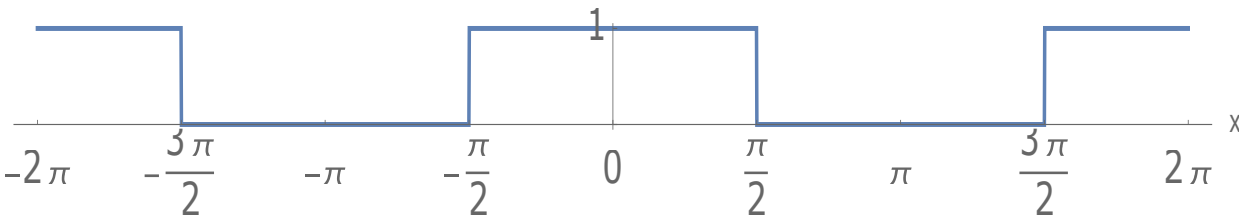
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\frac{n\pi}{L}x} \qquad\qquad -L \le x \le L$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\, dx \qquad\qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

ÖRNEK 1

Aşağıdaki fonksiyon için kompleks Fourier seri açılımını bulun.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ 1 & -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le x < \pi \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$



Çözüm: Grafikte görüldüğü gibi $f(x)$ simetriktir ve dolayısıyla çift fonksiyondur. Fonksiyonun periyodu $T = 2L = 2\pi$ olduğundan $L = \pi$ olarak alırız. Kompleks Fourier serisi artık şöyledir.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{n\pi}{\pi}x} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\, dx$$

Fonksiyon sadece $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında birdir ve diğer aralıklarda sıfırdır.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inx}\, 1\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{e^{-in\pi/2}}{-in}\right] - \left[\frac{e^{in\pi/2}}{-in}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(-in)}\left\{e^{-in\pi/2} - e^{in\pi/2}\right\} = \frac{1}{-2i\pi n}(-2i)\sin(n\pi/2) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{-n\pi}\sin(-n\pi/2) = \frac{-\sin(n\pi/2)}{-n\pi} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = c_n$$

Fonksiyon simetrik olduğu için $c_{-n} = c_n$ çıktı. Burada $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ tamsayıları için n çift ise $\sin(n\pi/2) = 0$ olur ve n tek ise sırayla $(+1)$ ve (-1) olur, yani $\sin(n\pi/2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ olur. Sırasıyla katsayılar şöyledir.

$$c_n = c_{-n} = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi/2)$$

$$c_1 = c_{-1} = \frac{1}{1\cdot\pi}\sin(1\cdot\pi/2) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi/2) = \frac{1}{\pi}$$

$$c_2 = c_{-2} = \frac{1}{2\cdot\pi}\sin(2\cdot\pi/2) = \frac{1}{2\pi}\sin(\pi) = 0$$

$$c_3 = c_{-3} = \frac{1}{3\cdot\pi}\sin(3\cdot\pi/2) = \frac{1}{3\pi}\sin(3\pi/2) = -\frac{1}{3\pi}$$

$$c_4 = c_{-4} = 0$$

$$c_5 = c_{-5} = \frac{1}{5\cdot\pi}\sin(1\cdot\pi/2) = \frac{1}{5\pi}\sin(5\pi/2) = \frac{1}{5\pi}$$

$$c_6 = c_{-6} = 0$$

Ayrıca c_0 da hesaplanmalı.

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Seri şöyle olur.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{\pi}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$f(x) = \cdots + c_{-5}e^{-i5x} + c_{-3}e^{-i3x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_3e^{i3x} + c_5e^{i5x} + \cdots$$

Burada $c_{-n} = c_n$ olduğunu hatırlayın.

$$f(x) = \cdots + c_5e^{-i5x} + c_3e^{-i3x} + c_1e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_3e^{i3x} + c_5e^{i5x} + \cdots$$

$$f(x) = c_0 + c_1\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + c_3\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + c_5\left(e^{i5x} + e^{-i5x}\right) + \cdots$$

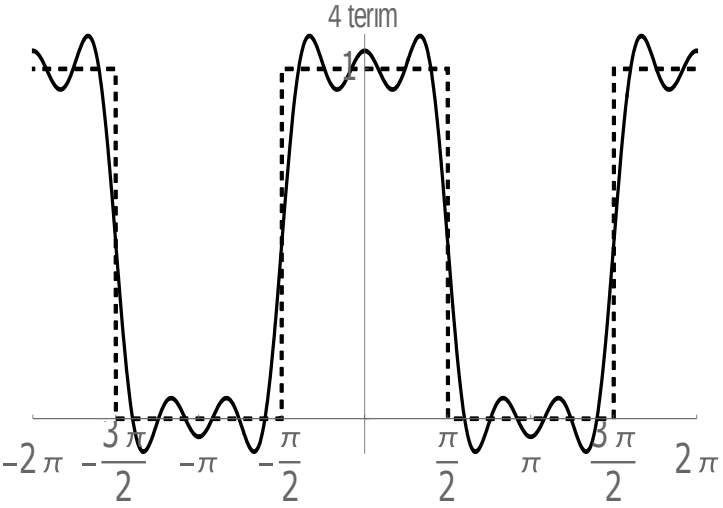
Burada $e^{inx} + e^{inx} = 2\cos(nx)$ yazabiliriz.

$$f(x) = c_0 + 2c_1\cos(x) + 2c_3\cos(3x) + 2c_5\cos(5x) + \cdots$$

Artık katsayıları koyabiliriz.

$$f(x) = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{\pi}\right)\cos(x) + 2\left(-\frac{1}{3\pi}\right)\cos(3x) + 2\left(\frac{1}{5\pi}\right)\cos(5x) + \cdots$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(x) - \frac{2}{3\pi}\cos(3x) + \frac{2}{5\pi}\cos(5x) + \cdots$$



Bununla beraber genel ifadeyi şöyle yazarız.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{\pi}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n\, e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-inx}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, 2\cos(nx)$$

$n = 2k$ için $c_{2k} = 0$ olur, ve $n = 2k - 1$ ve $k = 1, 2, 3, \ldots$ için $c_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}$ olur.

Sonuçta, serinin genel ifadesi yazılır.

$$f(x) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \cos(2kx) + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \cos\big((2k-1)x\big)$$

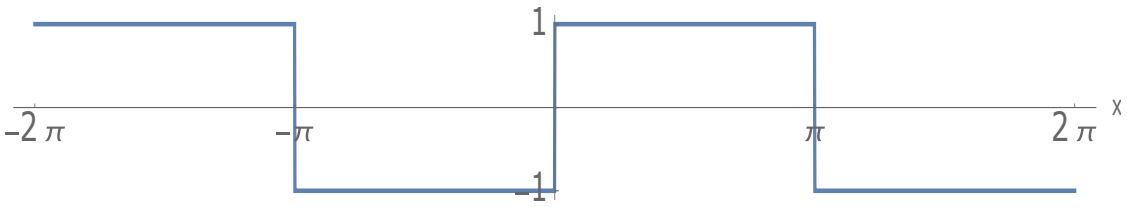
$$f(x) = c_0 + 2 \cdot 0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}\cos\big((2k-1)x\big) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1}\cos\big((2k-1)x\big)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)}\cos\big((2k-1)x\big)$$

ÖRNEK 2

Aşağıdaki fonksiyon için kompleks Fourier seri açılımını bulun.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < 0 \\ 1 & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$



Çözüm: Grafikte görüldüğü gibi $f(x)$ antisimetriktir ve dolayısıyla tek fonksiyondur. Fonksiyonun periyodu $T = 2L = 2\pi$ olduğundan $L = \pi$ olarak alırız. Kompleks Fourier serisi artık şöyledir.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{n\pi}{\pi}x} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

Fonksiyon sadece $[-\pi, 0]$ aralığında eksi birdir ve $[0, \pi]$ artı birdir.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,dx \qquad\qquad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}(-1)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}(+1)\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-inx}\,dx$$

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{2i\pi n}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2i\pi n}\left[e^{-inx}\right]_{0}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2i\pi n}\left[e^{-in0} - e^{+in\pi}\right] - \frac{1}{2i\pi n}\left[e^{-in\pi} - e^{-in0}\right] = \frac{1}{2i\pi n}\left[1 - e^{+in\pi}\right] - \frac{1}{2i\pi n}\left[e^{-in\pi} - 1\right]$$

$$c_n = \frac{1 - e^{+in\pi} - e^{-in\pi} + 1}{2i\pi n} = \frac{2 - e^{+in\pi} - e^{-in\pi}}{2i\pi n} = \frac{2 - 2\cos(n\pi)}{2i\pi n} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{i\pi n}$$

$$c_n = i\frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi n}$$

$$c_{-n} = i\frac{\cos(-n\pi) - 1}{\pi(-n)} = -i\frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi n} = -c_n$$

Fonksiyon antisimetrik olduğu için $c_{-n} = -c_n$ çıktı. Burada $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ tamsayıları için n çift ise $\cos(n\pi) = 1$ olur ve n tek ise $\cos(n\pi) = -1$ olur, yani $\cos(n\pi) = n$ olur. Sırasıyla katsayılar şöyledir.

$$c_n = -c_{-n} = i\frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi n}$$

$$c_1 = -c_{-1} = i\frac{\cos(1\pi) - 1}{\pi 1} = i\frac{-1 - 1}{\pi} = -\frac{2i}{\pi}$$

$$c_2 = -c_{-2} = i\frac{\cos(2\pi) - 1}{\pi 2} = i\frac{1 - 1}{2\pi} = 0$$

$$c_3 = -c_{-3} = i\frac{\cos(3\pi) - 1}{\pi 3} = i\frac{-1 - 1}{3\pi} = -\frac{2i}{3\pi}$$

$$c_4 = -c_{-4} = 0$$

$$c_5 = -c_{-5} = i\frac{\cos(5\pi) - 1}{\pi 5} = i\frac{-1 - 1}{5\pi} = -\frac{2i}{5\pi}$$

$$c_6 = -c_{-6} = 0$$

Ayrıca c_0 da hesaplanmalı. Tek fonksiyon olduğundan sıfır çıkar.

$$c_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi}(+1)\,dx\right] = \frac{1}{2\pi}\{[x]_{-\pi}^{0} + [x]_{0}^{\pi}\}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\{[0 + \pi] - [\pi - 0]\} = \frac{1}{2\pi}\{\pi - \pi\} = 0$$

Seri şöyle olur.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{\pi}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$f(x) = \cdots + c_{-5}e^{-i5x} + c_{-3}e^{-i3x} + c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} + c_3e^{i3x} + c_5e^{i5x} + \cdots$$

Burada $c_n = -c_{-n}$ olduğunu ve $c_0 = 0$ hatırlayın.

$$f(x) = \cdots - c_5e^{-i5x} - c_3e^{-i3x} - c_1e^{-ix} + 0 + c_1e^{ix} + c_3e^{i3x} + c_5e^{i5x} + \cdots$$

$$f(x) = c_1\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + c_3\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right) + c_5\left(e^{i5x} - e^{-i5x}\right) + \cdots$$

Burada $e^{inx} - e^{inx} = 2i\sin(nx)$ yazabiliriz.

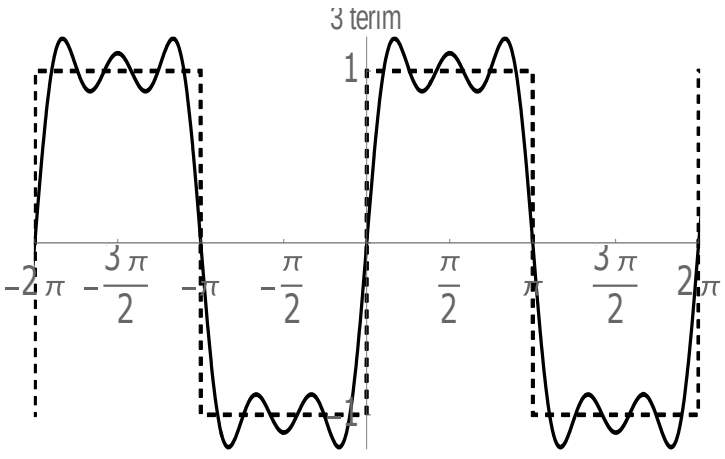
$$f(x) = 2ic_1\sin(x) + 2ic_3\sin(3x) + 2ic_5\sin(5x) + \cdots$$

Artık katsayıları koyabiliriz.

$$f(x) = 2i\left(-\frac{2i}{\pi}\right)\sin(x) + 2i\left(-\frac{2i}{3\pi}\right)\sin(3x) + 2i\left(-\frac{2i}{\pi}\right)\sin(5x) + \cdots$$

Burada $i^2 = -1$ kullanırız.

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sin(x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3x) + \frac{4}{5\pi}\sin(5x) + \cdots$$



Bununla beraber genel ifadeyi şöyle yazarız.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{L}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi}{\pi}x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n\, e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\, e^{-inx}$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(e^{inx} - e^{-inx}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, 2i \sin(nx)$$

$n = 2k$ için $c_{2k} = 0$ olur, ve $n = 2k-1$ ve $k = 1, 2, 3, \ldots$ için $c_{2k-1} = \frac{-2\mathrm{i}}{(2k-1)\pi}$ olur.

Sonuçta, serinin genel ifadesi yazılır.

$$f(x) = c_0 + 2i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = c_0 + 2i \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \sin(2kx) + 2i \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \sin\big((2k-1)x\big)$$

$$f(x) = 0 + 2i \cdot 0 + 2i \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \sin\big((2k-1)x\big) = 2i \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k-1} \sin\big((2k-1)x\big)$$

$$f(x) = \frac{2i}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2i}{(2k-1)} \sin\big((2k-1)x\big) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)} \sin\big((2k-1)x\big)$$