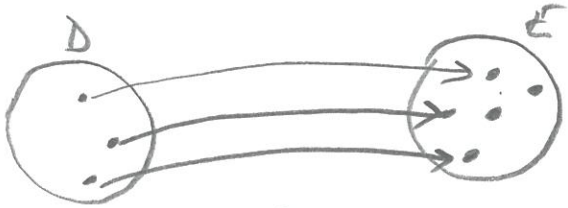
FONKSİYONLAR

D ve E'nin iki küme olduğu varsayılsın. D'nin herbir elemanını E'nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına D'den E'ye bir fonksiyon denir.

D'den E'ye bir fonksiyon genellikle;

$f : D \to E$ 'ye şeklinde gösterilir.

Burada D kümesine fonksiyonun tanım kümesi, E kümesine ise değer kümesi denilmektedir.



$f : D \to E$

İki oğu arasındaki ilişki ya da bağıntının fonksiyon olabilmesi için tanım kümesindeki herbir elemanın değer ya da görüntü kümesinde bir karşılığı olmalıdır. Ayrıca karşılık gelen bu değer tek olmalıdır. Örneğin; $f(2)=5$ ve $f(4)=5$ ise bu bağıntının fonksiyon olması söz konusu değildir. Çünkü 5 değerini veren tanım kümesindeki eleman 2 midir? yoksa 4 midir? Bu durum karmaşaya sebep olmaktadır.

Eğer f fonksiyonu, tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanına eşleştiriyorsa, x'in f altındaki görüntüsü veya değeri y'dir denilebilir ve $y=f(x)$ biçiminde gösterilebilir.

Eğer ki $D \subset R$, $E \subset R$ ve f ise D'den E'ye bir fonksiyon ise, bu fonksiyon bir reel değişkenli fonksiyondur.

Bu tür fonksiyonlarda f'in tanım kümesi $f(x)$ ifadesini reel sayı yapan tüm x değerlerinin kümesidir.

ÖRNEK

$f(x)=\sqrt{1-x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$\sqrt{1-x} \in \mathbb{R}$ olması için $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ olmalıdır.
Bu bağlamda tanım kümesi $(-\infty, 1]$ aralığıdır.

$f: D \to E$ ve $g: K \to L$ iki fonksiyon olmak üzere aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

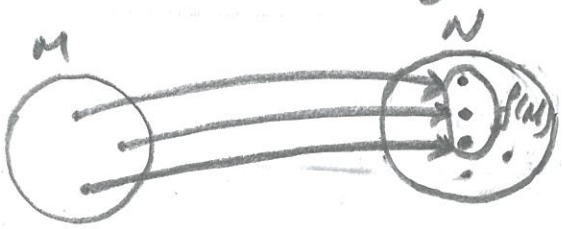
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad g(x) \neq 0$

$f: M \to N$ bir fonksiyon, $K \subset M$ ve $L \subset N$ olsun.

$f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ kümesine K'nın f altındaki görüntüsü, $f^{-1}(L) = \{x : f(x) \in L\}$ kümesine de L'nin f altındaki ters görüntüsü denilir.

$f(M)$ kümesine de görüntü kümesi adı verilir.



$f(M) \subset N$

$f: C \to D$ fonksiyonu için,

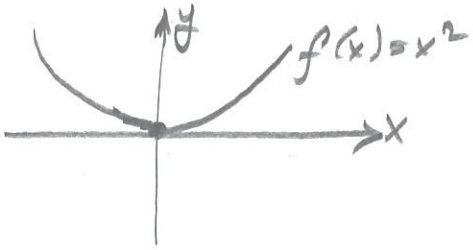
$f(C) = D$ ise f fonksiyonu örten fonksiyon; eğer değilse fonksiyon içine fonksiyondur.

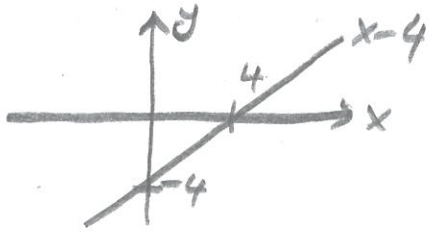
Bu durumda eğer fonksiyon örten fonksiyon ise, değer kümesinde bulunan her bir eleman tanım kümesindeki en az bir elemanın görüntüsüdür.

ÖRNEK

$f(x) = x^2$ fonksiyonu içine fonksiyon, $k(x) = x - 4$ biçiminde tanımlanan fonksiyon ise örten fonksiyondur. (Fonksiyonlar $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlıdır.)

Bu durum aşağıda verilen grafiklerden de anlaşılabilmektedir.





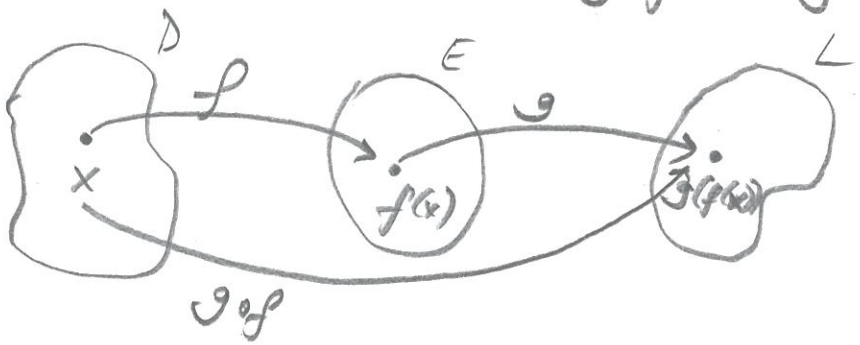
$k(R)=R$ 'dir.

$f(R)=R^+ \cup \{0\} \neq R$

$f: F \to G$ fonksiyonu için, farklı tanım kümesi değerlerinin farklı görüntüleri varsa f fonksiyonu birebir fonksiyon olmaktadır.

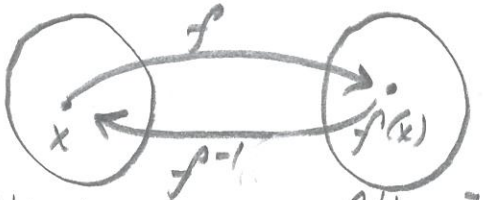
NOT: Bir f fonksiyonu aynı anda hem örten hem de birebir ise f fonksiyonu birebir örten fonksiyondur.

$f: D \to E$ ve $g: K \to L$ fonksiyonları tanımlanmış olsun. O halde, g fonksiyonu $f(D)$'deki her $f(x)$ elemanının L kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına dönüştürür. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşkesi denir ve $g \circ f$ ile gösterilir.



Bileşke fonksiyonu

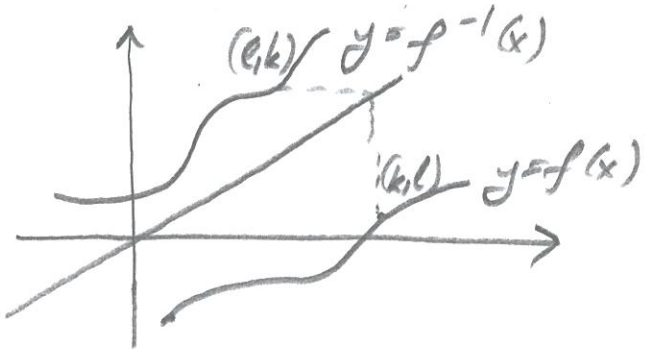
$f: D \to E$ fonksiyonu birebir örten olduğu kabulü ile, $(g \circ f)(x) = x$ ve $(f \circ g)(y) = y$ eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f'nin tersi denilir ve f^{-1} ile gösterilir.



f'in tanım kümesi
f^{-1}'in görüntü kümesi

f'in görüntü kümesi
f^{-1} tanım kümesi

D, E ⊂ R ve f, D'den E'ye birebir ve örten fonksiyon olmak üzere;
$y = f^{-1}(x)$ denklemini elde etmek için $y = f(x)$ denkleminden x çekilip; x yerine y, y yerine x yerleştirilirse,
(k, l) $y = f(x)$ üzerinde bir nokta ise; (l, k) 'nın $y = f^{-1}(x)$ üzerinde bir nokta olduğu anlaşılmaktadır. Bu noktalar $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.



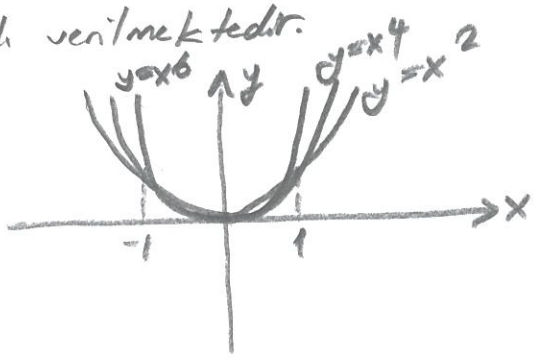
$D \subset R$ ve $f: D \to R$ 'ye bir fonksiyon olsun.
D'nin bir K alt kümesinin $k_1 < k_2$ koşulunu sağlayan her k_1, k_2 elemanları için $f(k_1) < f(k_2)$ ise f fonksiyonu K üzerinde artan; $f(k_1) \leq f(k_2)$ olursa azalmayandır denir. Benzer şekilde; K kümesinin $k_1 < k_2$ şartını sağlayan k_1, k_2 elemanları için $f(k_1) > f(k_2)$ oluyorsa f fonksiyonu için azalan, $f(k_1) \geq f(k_2)$ ise artmayandır denilebilir.
Herhangi bir aralık için tanımlı bir fonksiyon söz konusu aralığın tamamı için artan veya azalan ise fonksiyona kesin olarak monoton, artmayan veya azalmayan ise monotondur denilebilir.

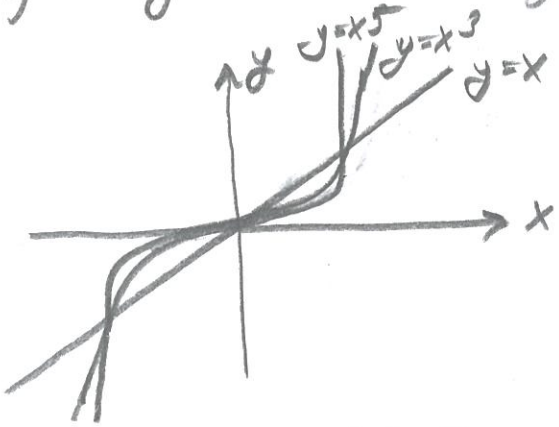
Eğer $x \in D$ olduğunda, $-x \in D$ oluyorsa, D kümesine simetriktir denilir. Simetrik özelliğe sahip bir D kümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu çift fonksiyondur. Eğer ki her $x \in D$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu tek fonksiyon olarak tanımlanır.

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$f(x) = x^k$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu adı verilmektedir.





Bazı kuvvet fonksiyonlarının grafikleri

$t(x) \neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = \dfrac{p(x)}{t(x)}$ şeklinde tanımı yapılan f fonksiyonuna rasyonel fonksiyon adı verilir.

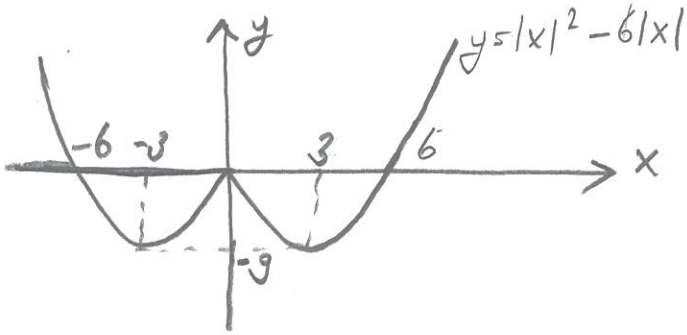
$K \subset \mathbb{R}$ ve f, K'dan $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon olduğu kabul edilsin.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona mutlak değer fonksiyonu adı verilir.

ÖRNEK

$y = |x|^2 - 6|x|$ eğrisini çiziniz.



Logaritmik Fonksiyonlar

Logaritma, bir sayının belirli bir taban kuvveti olarak nasıl yazılacağını belirler.

$f(x) = \log_a x \qquad a>0 \quad a\neq 1$

$a^{f(x)} = x$ şeklindeki ifade aslında kuvvet veya üstel fonksiyonun tersidir.

Özellikleri

Tanım Kümesi: $(0, +\infty)$

Görüntü veya Değer Kümesi: R

Taban yani a değişkeni 1'den büyük ise fonksiyon artandır.

Taban $0<a<1$ ise fonksiyon azalan özellik göstermektedir.

$\log_a 1 = 0$ 'dır. Çünkü tanımından, $a^x = 1$ üstel fonksiyonunun tanım kümesi $\{0\}$'dır. $(a \neq 0)$

Örnek

$f(x) = \log_{1/2} x$ Taban $0<a<1$ olduğundan fonksiyonun azalan olduğu sonuçlardan anlaşılmaktadır.

$f(1) = 0$

$f(2) = -1$

$f(4) = -2$

$f(8) = -3$

$\log_{10} 10 = 1$ 'dir. Çünkü $a^1 = a$'dır. 10 tabanında logaritma ifadesi bayağı logaritma olarak adlandırılır ve genel olarak ifadelerde belirtilmez.

$y = f(x) = \log 10000 = 4$ ✓

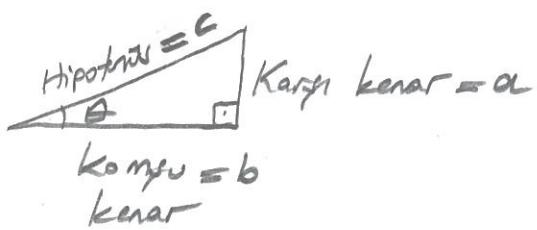
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ 'dir.

$\log_x x^a = a$ 'dir. ($\log_x x^a = a \cdot \log_x x$)

$\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$ (Taban Değiştirme)

Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir dik üçgenin açıları ile kenarları arasındaki metrik bağıntılardır.



$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$

$\cos\theta = \frac{b}{c}$ $\quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{c}{a}$

$\tan\theta = \frac{a}{b}$

$\cot\theta = \frac{b}{a}$

BİRİM ÇEMBER TANIMI

Birim çemberde bir açının karşılığı olan nokta $(\cos\theta, \sin\theta)$'dir.

Fonksiyonların anlamı:

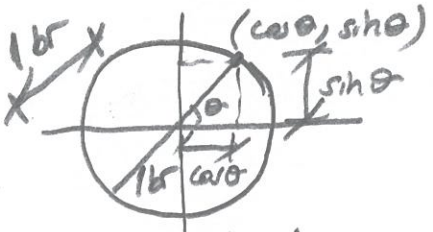
$\sin\theta$ = y - koordinatı

$\cos\theta$ = x - koordinatı

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Açı ölçü birimi: 1 tam çember = 360° = 2π radyan.



Dar Açılarda Temel Trigonometrik Fonksiyon Değerleri

Açı	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
30°	1/2	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tanımsız

TEMEL TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Sinüs Fonksiyonu

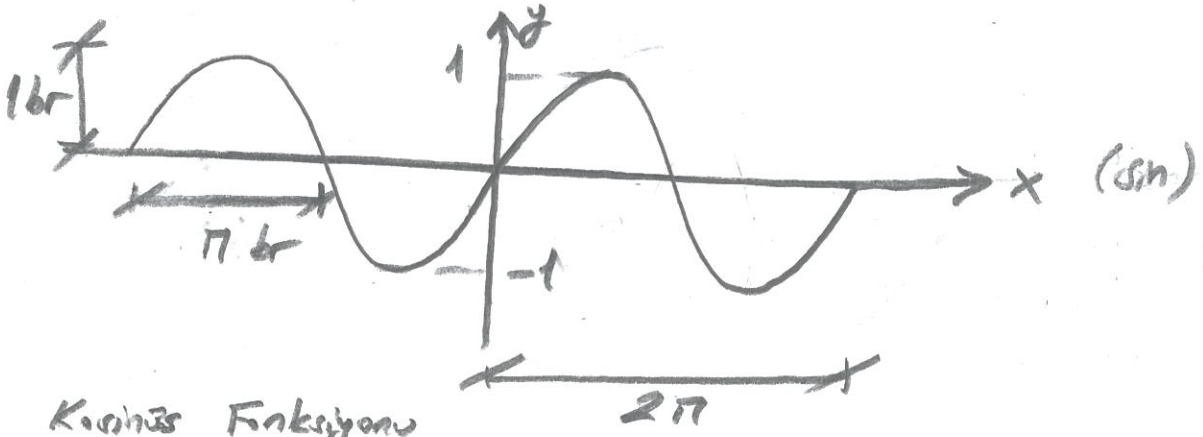
Periyot: 2π

Genlik: 1

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}$

Değer Kümesi: $[-1, 1]$

Simetri: Tek Fonksiyon (orijine göre simetrik) $(f(x) = x,\ f(-x) = -x)$



Kosinüs Fonksiyonu

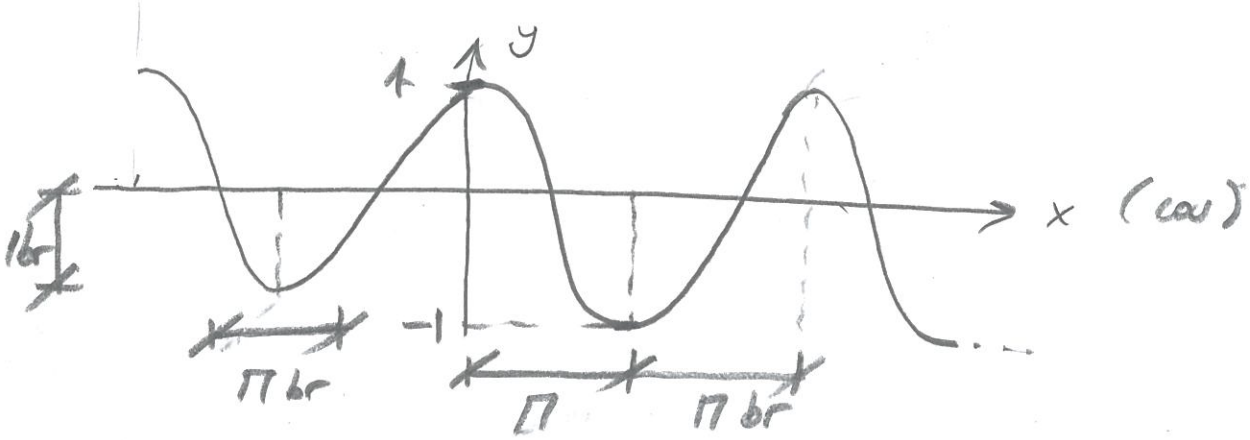
Periyot: 2π

Genlik: 1 br

Tanım kümesi: $\mathbb{R}$

Değer kümesi: $[-1, 1]$

Simetri: Çift Fonksiyon (y-eksenine göre simetrik)



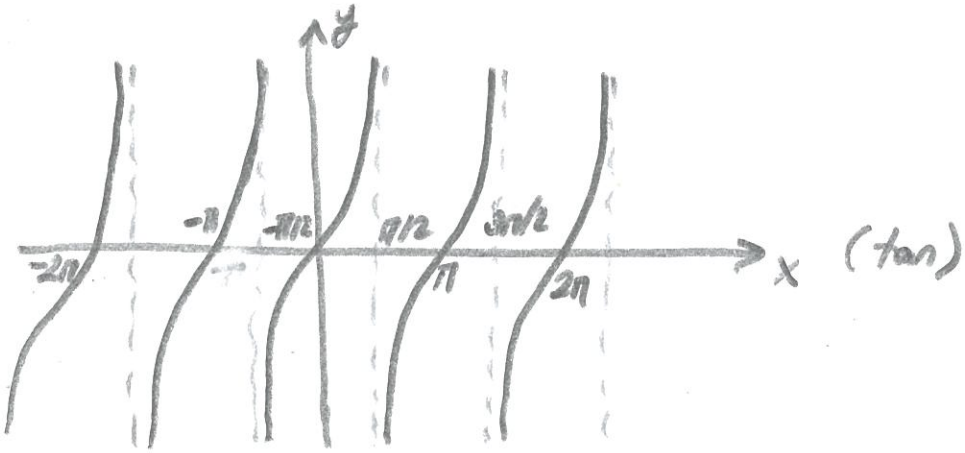
Tanjant Fonksiyonu

Periyot: π

Tanım kümesi: $R - \{\pi/2 + k\pi\}$

Değer kümesi: R

Asimptotlar: $x = \frac{x}{2} + k\pi$



Temel Trigonometrik Eşitlikler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x$

$= 2\cos^2 x - 1$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$

TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
$x = \arcsin(y)$	$x = \arccos(y)$	$x = \arctan(y)$	$x = \operatorname{arccot}(y)$

olarak tanımlanabilirler.

örneğin, $\sin 30^\circ = 1/2$ iken $\arcsin(1/2) = 30^\circ$'dur.

KAYNAKLAR

1- Genel Matematik, Mustafa BALCI, 2018.