ÖRNEK

Yarıçapı $r = a$ olan kürenin yüzeyi $f(\theta) = u_0 \cos^2(\theta)$ potansiyelinde tutuluyor. Kürenin içindeki ve dışındaki potansiyeli bulun.

Çözüm:

Kürenin içindeki potansiyeli bulmak için katsayıları bulalım.

$$A_l = \frac{1}{a^l}\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, f(\theta)\sin\theta \;\; d\theta$$

İntegrali almak için $x = \cos(\theta)$ dönüşümü yaparsak $dx = -\sin(\theta)\, d\theta$ olur, $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olur. Eksi işaretle integralin sınırları yer değişir.

$$A_l = \frac{1}{a^l}\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} P_l(x)\, f(x)\, dx$$

Ayrıca $f(\theta) = u_0 \cos^2(\theta) \;\rightarrow\; f(x) = u_0 x^2$ olur.

$$A_l = \frac{1}{a^l}\frac{2l+1}{2} u_0 \int_{-1}^{1} P_l(x)\, x^2\, dx$$

Legendre polinomları tek l için tek fonksiyondur ve çift l için çift fonksiyondur. Diğer x^2 fonksiyonu çifttir. Çift çarpı tek tek fonksiyon verir. Tek fonksiyonun $[-1,1]$ arasındaki integrali sıfır çıkar. İntegralleri $l = 0$ ve $l = 2$ için hesaplayalım.

$$A_0 = \frac{1}{a^0}\frac{2\cdot 0+1}{2} u_0 \int_{-1}^{1} P_0(x)\, x^2\, dx = \frac{1}{2} u_0 \int_{-1}^{1} 1\, x^2\, dx = \frac{u_0}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{u_0}{2}\left[\frac{(1)^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{u_0}{2}\frac{2}{3} = \frac{u_0}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{a^2}\frac{2\cdot 2+1}{2}u_0 \int_{-1}^{1} P_2(x)\, x^2\, dx = \frac{1}{a^2}\frac{5}{2}u_0 \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2-1)\, x^2\, dx$$

$$= \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(3x^4 - x^2)\, dx = \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\left[\frac{3x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\left[\left(\frac{3(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right) - \left(\frac{3(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right] = \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{u_0}{a^2}\frac{5}{4}\frac{8}{15} = \frac{u_0}{a^2}\frac{2}{3}$$

Bundan daha büyük çift indisli katsayılar da sıfır olur. Sonuçta sıfırdan farklı sadece iki katsayı vardır. Neden olduğuna çözümden sonra bakacağız. Kürenin içindeki çözüm şöyle olur.

$$u_{iç}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos(\theta)) = A_0P_0 + A_2r^2P_2 = \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{a^2}\frac{2}{3}r^2\frac{1}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)$$

$$= \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{a^2}\frac{1}{3}r^2(3\cos^2(\theta) - 1) = \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2(3\cos^2(\theta) - 1)$$

Kontrol için $r = a$ koyalım. Sınır koşulunu elde ederiz.

$$u_{iç}(a,\theta) = \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{3}\left(\frac{a}{a}\right)^2(3\cos^2(\theta) - 1) = \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{3}(3\cos^2(\theta) - 1)$$

$$= \frac{u_0}{3} + \frac{u_0}{3}3\cos^2(\theta) - \frac{u_0}{3} = u_0\cos^2(\theta) = f(\theta)$$

Başka bir yol olarak $f(\theta) = u_0\cos^2(\theta)$ fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden yazalım.

$$f(x) = u_0x^2 \qquad P_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2-1) \qquad 2P_2 = 3x^2 - 1 \qquad x^2 = \tfrac{1}{3}(2P_2 + 1)$$

Ayrıca $P_0 = 1$ kullanılır.

$$x^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0) = \frac{1}{3}P_0 + \frac{2}{3}P_2$$

$$f(x) = u_0\frac{1}{3}P_0 + u_0\frac{2}{3}P_2 = u(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, a^l\, P_l(\cos(\theta)) = A_0\, a^0\, P_0 + A_2\, a^2\, P_2$$

Sınır koşulu sadece iki tane Legendre polinomu ile yazılabiliyor. İntegral alırken ortogonallik bağlantısından dolayı sadece $l = 0$ ve $l = 2$ indisli Legendre polinomları için sıfırdan farklı çıkar. Bu nedenden dolayı diğer integrallerin sıfır çıkacağını tahmin edebildik. Buradan da katsayılar integraller alınmadan bulunabilir. Buradaki sayılar $A_l a^l$ katsayılarına karşılık gelir.

$A_0\, a^0 = u_0 \frac{1}{3}$ $\qquad$ $A_0 = u_0 \frac{1}{3}$ $\qquad$ $A_2\, a^2 = u_0 \frac{2}{3}$ $\qquad$ $A_2 = u_0 \frac{2}{3}\frac{1}{a^2}$

Aynı çözüm bulunur.

$$u_{iç}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos(\theta)) = A_0 P_0 + A_2 r^2 P_2 = u_0 \frac{1}{3} + u_0 \frac{2}{3}\frac{1}{a^2} r^2 (3\cos^2(\theta) - 1)$$

Kürenin dışındaki çözüm için katsayılar arasındaki eşitliği kullanabiliriz çünkü aynı integrallere eşittir.

$$A_l a^l = \frac{B_l}{a^{l+1}} = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{1} P_l(x)\, f(x)\, dx$$

$B_l = A_l a^{2l+1}$

Yine sadece $l = 0$ ve $l = 2$ indisli terimler sıfırdan farklı olur.

$$B_0 = A_0 a = \frac{1}{3} u_0 a$$

$$B_2 = A_2 a^5 = u_0 \frac{2}{3}\frac{1}{a^2} a^5 = \frac{2}{3} u_0 a^3$$

Çözüm şöyle olur.

$$u_{dış}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta)) = B_0 \frac{1}{r} P_0 + B_2 \frac{1}{r^3} P_2 = \frac{1}{3} u_0 a \frac{1}{r} P_0 + \frac{2}{3} u_0 a^3 \frac{1}{r^3} P_2$$

$$= \frac{1}{3} u_0 a \frac{1}{r} + \frac{2}{3} u_0 a^3 \frac{1}{r^3}\frac{1}{2}(3\cos^2(\theta) - 1)$$

$$= \frac{1}{3} u_0 \frac{a}{r} + \frac{1}{3} u_0 \left(\frac{a}{r}\right)^3 (3\cos^2(\theta) - 1)$$

Kontrol için $r = a$ koyalım. Sınır koşulunu elde ederiz.

$$u_{dış}(a,\theta) = \frac{1}{3}u_0\frac{a}{a} + \frac{1}{3}u_0\left(\frac{a}{a}\right)^3(3\cos^2(\theta)-1) = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}u_0(3\cos^2(\theta)-1)$$
$$= u_0\cos^2(\theta) = f(\theta)$$

ÖRNEK

Yarıçapı $r = a$ olan kürenin yüzeyi $f(\theta) = u_0\cos(3\theta)$ potansiyelinde tutuluyor. Kürenin içindeki ve dışındaki potansiyeli bulun.

Çözüm:

İntegral alabilmek için ve katsayıları bulmak için ilk olarak sınır koşulunu $\cos(\theta)$ cinsinden yazabilmeliyiz.

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ $\qquad$ $e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$

$$e^{i3\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^3 = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^3$$
$$= 1[\cos(\theta)]^3 + 3[\cos(\theta)]^2[i\sin(\theta)] + 3[\cos(\theta)][i\sin(\theta)]^2 + 1[i\sin(\theta)]^3$$
$$= \cos^3(\theta) + i3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)$$

Reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı eşit olur.

$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$ $\qquad$ $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$

Bize lazım olan ilk eşitliktir. Üzerinde düzeltme yapıp $x = \cos(\theta)$ cinsinden yazalım.

$$\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\,[1-\cos^2(\theta)]$$
$$= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) + 3\cos^3(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 4x^3 - 3x$$

$f(x) = u_0(4x^3 - 3x)$

Bu sefer integral almak yerine $f(x)$ fonksiyonunu Legendre fonksiyonları cinsinden yazalım. Üst sayılara bakarsak en fazla P_3 olabilir.

$P_0(x) = 1$ $\qquad$ $P_1(x) = x$ $\qquad$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $\qquad$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$2P_3 = 5x^3 - 3x$ $\qquad$ $2P_3 + 3x = 5x^3$ $\qquad$ $x^3 = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}x$

Ayrıca $P_1 = x$ olur.

$$x^3 = \frac{3}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_3$$

Sınır koşulu Legendre polinomları cinsinden şöyle yazılır.

$$f(x) = u_0(4x^3 - 3x) = u_0\left[4\left(\frac{3}{5}P_1 + \frac{2}{5}P_3\right) - 3P_1\right] = u_0\left[\frac{12}{5}P_1 + \frac{8}{5}P_3 - 3P_1\right]$$
$$= u_0\left[-\frac{3}{5}P_1 + \frac{8}{5}P_3\right]$$

Kürenin içindeki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla A_l bulunabilir.

$$u_{iç}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{iç}(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, a^l\, P_l = f(x) = u_0\left[-\frac{3}{5}P_1 + \frac{8}{5}P_3\right]$$

$l = 1 \quad A_1 a^1 = u_0\left(-\frac{3}{5}\right) \qquad A_1 = -\frac{3}{5}u_0\frac{1}{a} \qquad l = 3 \quad A_3 a^3 = u_0\left(\frac{8}{5}\right) \qquad A_3 = \frac{8}{5}u_0\frac{1}{a^3}$

$$u_{iç}(r,\theta) = A_1\, r^1\, P_1 + A_3\, r^3\, P_3 = -\frac{3}{5}u_0\frac{1}{a}r\cos(\theta) + \frac{8}{5}u_0\frac{1}{a^3}r^3\frac{1}{2}(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$$
$$= -\frac{3}{5}u_0\frac{r}{a}\cos(\theta) + \frac{4}{5}u_0\left(\frac{r}{a}\right)^3(5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$$

Kürenin dışındaki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla B_l bulunabilir.

$$u_{dış}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l\frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{dış}(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l\frac{1}{a^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta)) = f(x) = u_0\left[-\frac{3}{5}P_1 + \frac{8}{5}P_3\right]$$

$l = 1 \quad B_1\frac{1}{a^2} = u_0\left(-\frac{3}{5}\right) \qquad B_1 = -\frac{3}{5}u_0 a^2 \qquad l = 3 \quad A_3\frac{1}{a^4} = u_0\left(\frac{8}{5}\right) \qquad A_3 = \frac{8}{5}u_0 a^4$

$$u_{dış}(r,\theta) = B_1 \frac{1}{r^2} P_1 + B_3 \frac{1}{r^4} P_3$$
$$= -\frac{3}{5} u_0 a^2 \frac{1}{r^2} \cos(\theta) + \frac{8}{5} u_0 a^4 \frac{1}{r^4} \frac{1}{2} (5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$$
$$= -\frac{3}{5} u_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos(\theta) + \frac{4}{5} u_0 \left(\frac{a}{r}\right)^4 (5\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta))$$

Aynı katsayılar kısa yoldan da bulunabilir ve seriye konulabilir.

$B_l = A_l a^{2l+1}$ $B_1 = A_1 a^3 = -\frac{3}{5} u_0 \frac{1}{a} a^3 = -\frac{3}{5} u_0 a^2$ $B_3 = A_3 a^7 = \frac{8}{5} u_0 \frac{1}{a^3} a^7 = \frac{8}{5} u_0 a^4$

ÖRNEK

Yarıçapı $r = 3$ olan kürenin yüzeyi $f(\theta) = \cos(2\theta)$ potansiyelinde tutuluyor. Kürenin içindeki ve dışındaki potansiyeli bulun.

Çözüm:

İntegral alabilmek için ve katsayıları bulmak için ilk olarak sınır koşulunu $\cos(\theta)$ cinsinden yazabilmeliyiz.

$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ $e^{i2\theta} = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$

$$e^{i2\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2 = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2 = 1[\cos(\theta)]^2 + 2[\cos(\theta)][i\sin(\theta)] + 1[i\sin(\theta)]^2$$
$$= \cos^2(\theta) + i2\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı eşit olur.

$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$

Bize lazım olan ilk eşitliktir. Üzerinde düzeltme yapıp $x = \cos(\theta)$ cinsinden yazalım.

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

Bu sefer integral almak yerine $f(x)$ fonksiyonunu Legendre fonksiyonları cinsinden yazalım. Üst sayılara bakarsak en fazla P_2 olabilir.

$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$2P_2(x) = 3x^2 - 1$ $x^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}$

$$2x^2 - 1 = 2\left(\frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}\right) - 1 = \frac{4}{3}P_2 + \frac{2}{3} - 1 = \frac{4}{3}P_2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_0$$

Sınır koşulu Legendre polinomları cinsinden şöyle yazılır.

$$f(x) = 2x^2 - 1 = \frac{4}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_0$$

Kürenin içindeki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla A_l bulunabilir.

$$u_{iç}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{iç}(3,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, 3^l\, P_l = A_0\, 3^0\, P_0 + A_1\, 3^1\, P_1 + A_2\, 3^2\, P_2 + A_3\, 3^3\, P_3 + \cdots$$

$$u_{iç}(3,\theta) = f(x) = \frac{4}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_0$$

$l = 0$ $A_0 3^0 = -\frac{1}{3}$ $A_0 = -\frac{1}{3}$ $l = 2$ $A_2 3^2 = \frac{4}{3}$ $A_2 = \frac{4}{27}$

$$u_{iç}(r,\theta) = A_0\, r^0\, P_0 + A_2\, r^2\, P_2 = -\frac{1}{3}1 + \frac{4}{27}r^2\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{27}r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

Kürenin dışındaki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla B_l bulunabilir.

$$u_{dış}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{dış}(3,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{3^{l+1}}\, P_l = B_0 \frac{1}{3^{0+1}}\, P_0 + B_1 \frac{1}{3^{1+1}}\, P_1 + B_2 \frac{1}{3^{2+1}}\, P_2 + B_3 \frac{1}{3^{3+1}}\, P_3 + \cdots$$

$$u_{dış}(3,\theta) = f(x) = \frac{4}{3}P_2 - \frac{1}{3}P_0$$

$l = 0$ $B_0 \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ $B_0 = -1$ $l = 2$ $B_2 \frac{1}{3^3} = \frac{4}{3}$ $B_2 = 36$

$$u_{dış}(r,\theta) = B_0 \frac{1}{r}\, P_0 + B_2 \frac{1}{r^3}\, P_2 = -1\frac{1}{r}1 + 36\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}(3x^2-1) = -\frac{1}{r} + \frac{18}{r^3}\,(3\cos^2\theta - 1)$$

Aynı katsayılar kısa yoldan da bulunabilir ve seriye konulabilir.

$B_l = A_l a^{2l+1}$ $B_0 = A_0 a^1 = -\frac{1}{3}3 = -1$ $B_2 = A_2 a^5 = \frac{4}{27}3^5 = 12$

ÖRNEK

Yarıçapı $r = 2$ olan kürenin yüzeyi aşağıda verilen potansiyelde tutuluyor. Kürenin içindeki ve dışındaki potansiyeli bulun.

$$f(\theta) = 1 + \cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta) + \frac{1}{5}\sin^2(\theta)$$

Çözüm:

Sınır koşulu üzerinde düzeltme yapıp $x = \cos(\theta)$ cinsinden yazalım.

$$f(\theta) = 1 + \cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta) + \frac{1}{5}[1 - \cos^2(\theta)]$$
$$= 1 + \cos(\theta) - \frac{1}{3}\cos^2(\theta) + \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos^2(\theta) = \frac{6}{5} + \cos(\theta) - \frac{8}{15}\cos^2(\theta)$$

$$f(x) = \frac{6}{5} + x - \frac{8}{15}x^2$$

Bu sefer integral almak yerine $f(x)$ fonksiyonunu Legendre fonksiyonları cinsinden yazalım. Üst sayılara bakarsak en fazla P_2 olabilir.

$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$2P_2(x) = 3x^2 - 1$ $x^2 = \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}$

$$f(x) = \frac{6}{5} + P_1 - \frac{8}{15}\left(\frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{6}{5} + P_1 - \frac{16}{45}P_2 - \frac{8}{45} = \frac{46}{45}P_0 + P_1 - \frac{16}{45}P_2$$

Sınır koşulu Legendre polinomları cinsinden şöyle yazılır.

$$f(x) = \frac{6}{5} + x - \frac{8}{15}x^2 = \frac{46}{45}P_0 + P_1 - \frac{16}{45}P_2$$

Kürenin içindeki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla A_l bulunabilir.

$$u_{iç}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{iç}(2,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, 2^l\, P_l = A_0\, 2^0\, P_0 + A_1\, 2^1\, P_1 + A_2\, 2^2\, P_2 + A_3\, 2^3\, P_3 + \cdots$$

$$u_{iç}(2,\theta) = f(x) = \frac{46}{45}P_0 + P_1 - \frac{16}{45}P_2$$

$l = 0 \qquad A_0 2^0 = 46/45 \qquad A_0 = 46/45$

$l = 1 \qquad A_1 2^1 = 1 \qquad A_1 = 1/2$

$l = 2 \qquad A_2 2^2 = -16/45 \qquad A_2 = -4/45$

$$u_{iç}(r,\theta) = A_0\, r^0\, P_0 + A_1\, r^1\, P_1 + A_2\, r^2\, P_2 = \frac{46}{45}1 + \frac{1}{2}\, r^1\, x - \frac{4}{45}r^2\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$= \frac{46}{45} + \frac{1}{2}r\cos(\theta) - \frac{2}{45}r^2(3\cos^2\theta - 1)$$

Kürenin dışındaki çözüme bakalım. Buradan kıyaslamayla A_l bulunabilir.

$$u_{dış}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos(\theta))$$

$$u_{dış}(2,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{2^{l+1}}\, P_l = B_0\frac{1}{2^1}\, P_0 + B_1\frac{1}{2^2}\, P_1 + B_2\frac{1}{2^3}\, P_2 + B_3\frac{1}{2^4}\, P_3 + \cdots$$

$$u_{dış}(2,\theta) = f(x) = \frac{46}{45}P_0 + P_1 - \frac{16}{45}P_2$$

$l = 0 \qquad B_0 \frac{1}{2^1} = 46/45 \qquad B_0 = 92/45$

$l = 1 \qquad B_1 \frac{1}{2^2} = 1 \qquad B_1 = 4$

$l = 2 \qquad B_2 \frac{1}{2^3} = -16/45 \qquad B_2 = -128/45$

$$u_{dış}(r,\theta) = B_0\frac{1}{r}\, P_0 + B_1\frac{1}{r^2}\, P_1 + B_2\frac{1}{r^3}\, P_2 = \frac{92}{45}\frac{1}{r}\, 1 + 4\frac{1}{r^2}\, x - \frac{128}{45}\frac{1}{r^3}\, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$
$$= \frac{92}{45}\frac{1}{r}\, + 4\frac{1}{r^2}\cos(\theta) - \frac{64}{45}\frac{1}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

Aynı katsayılar kısa yoldan da bulunabilir ve seriye konulabilir.

$B_l = A_l a^{2l+1}$ $\qquad$ $B_0 = A_0 a^1 = \frac{46}{45} 2 = \frac{92}{45}$

$B_1 = A_1 a^3 = \frac{1}{2} 2^3 = 4$ $\qquad$ $B_2 = A_2 a^5 = -\frac{4}{45} 2^5 = -\frac{128}{45}$