SINIR DEĞER PROBLEMİ

Aşağıdaki ikinci dereceden lineer diferansiyel denklem için iki çeşit koşul tanımlanabilir.

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x)$

i) Başlangıç koşulu, tek noktada tanımlanır ve $y(x_0) = s_1$ ve $y'(x_0) = s_2$ biçimindedir.

ii) Sınır koşulu, iki noktada $y(x)$ veya $y'(x)$ için koşul tanımlanabilir. Biz özel olarak $y(\alpha_1) = \beta_1$ ve $y(\alpha_2) = \beta_2$ biçimindeki koşullara bakacağız.

Sınır koşulları ile diferansiyel denklemin çözümü, başlangıç koşullarınkiyle benzer gözükse bile iki tür birbirinden farklıdır. Bu nedenle farklı isimlendirilmiştir. Başlangıç koşullu bir denklemin her zaman bir çözümü vardır. Fakat sınır koşullu bir denklem 1) tek çözümlü, 2) sonsuz çözümlü veya 3) çözümsüz olabilir. Bu bakımdan $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ ile matris denklemi olarak yazdığımız lineer cebirsel denklemlerin çözümüne benzer.

Homojen diferansiyel denklem, $g(x) = 0$ ise ve sınır koşulları sıfır ise olur. Bunlardan biri sıfırdan farklı ise homojen olmayan diferansiyel denklem olur.

Homojen diferansiyel denklem:

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ için $y(\alpha_1) = 0$ ve $y(\alpha_2) = 0$

Homojen olmayan diferansiyel denklem:

$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = g(x)$ için $g(x) \neq 0$ veya $y(\alpha_1) \neq 0$ veya $y(\alpha_2) \neq 0$

Çözüm şekilleri şöyle olabilir:

1) Homojen denklem için sadece aşikâr çözüm ($y = 0$) olabilir ve buna karşılık aynı denklemin homojen olmayan durumu için de tek çözüm olur.

2) Homojen denklem için aşikâr çözüm yanında sonsuz çözüm olabilir ve buna karşılık aynı denklemin homojen olmayan durumu için ya sonsuz çözüm olabilir ya da çelişki varsa çözümsüz olabilir.

Bunları örneklerle görelim.

ÖRNEK 1: HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEM, AŞİKÂR ÇÖZÜM

$y'' + 2y = 0$ ve $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ sınır-değer problemini çözün.

Çözüm: Diferansiyel denklem homojendir ve genel çözüm şöyledir.

$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$

İlk koşul $y(0) = 0$ için, $0 = c_1 \cos(\sqrt{2} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow \ c_1 = 0$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için, $0 = c_2 \sin(\sqrt{2}\pi)$ olur. Bu durumda $\sin(\sqrt{2}\pi) \neq 0$ olduğundan mecburen tek seçenek $c_2 = 0$ olur. Sonuçta $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olduğundan $y(x) = 0$ tek çözüm olur.

ÖRNEK 2: HOMOJEN OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM, TEK ÇÖZÜM

$y'' + 2y = 0$ ve $y(0) = 1, y(\pi) = 0$ sınır-değer problemini çözün.

Çözüm: Önceki örneğin homojen olmayan durumu için çözüm bakıyoruz. Genel çözüm şöyledir.

$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{2}x) + c_2 \sin(\sqrt{2}x)$

İlk koşul $y(0) = 1$ için, $1 = c_1 \cos(\sqrt{2} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{2} \cdot 0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow \ c_1 = 1$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için, $0 = 1 \cdot \cos(\sqrt{2}\pi) + c_2 \sin(\sqrt{2}\pi)$ olur. Bu durumda $c_2 = \ - \ \cot(\sqrt{2}\pi) \cong -0.2762$ olur. Sonuçta $y(x) = \cos(\sqrt{2}x) - \cot(\sqrt{2}\pi) \sin(\sqrt{2}x)$ tek çözüm olur.

ÖRNEK 3: HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEM, SONSUZ ÇÖZÜM

$y'' + y = 0$ ve $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ sınır-değer problemini çözün.

Çözüm: Diferansiyel denklem homojendir ve genel çözüm şöyledir.

$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$

İlk koşul $y(0) = 0$ için, $0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow \ c_1 = 0$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için, $0 = c_2 \sin(\pi)$ olur. Bu durumda $\sin(\pi) = 0$ olduğundan c_2 herhangi bir değer alabilir e serbest değişkendir. Sonuçta $y(x) = c_2 \sin(x)$ çözüm olur ve c_2 için verilen her değer için sonsuz çözüm vardır.

ÖRNEK 4: HOMOJEN OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM, SONSUZ ÇÖZÜM VEYA ÇÖZÜMSÜZ

$y'' + y = 0$ ve $y(0) = 1, y(\pi) = k$ sınır-değer problemini çözün. (k herhangi bir sayıdır.)

Çözüm: Önceki örneğin homojen olmayan durumu için çözüm bakıyoruz. Genel çözüm şöyledir.

$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$

İlk koşul $y(0) = 1$ için, $1 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow \ c_1 = 1$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = k$ için, $k = 1 \cdot \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = 1 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0 = -1$ olur. Bu durumda k'nın değerine bağlı olarak iki çeşit çözüm olabilir.

Eğer soruda $k \neq -1$ olursa, ikinci koşulun sonunda çelişki çıkmasından dolayı denklemin çözümü olmaz. Ve eğer soruda $k = -1$ olursa, ikinci koşulun sonunda $-1 = -1$ sağlanır ve c_2 serbest değişken kalır. Bu durumda $y(0) = \ 1, y(\pi) = -1$ için $y(x) = \cos(x) + c_2 \sin(x)$ sonsuz sayıda çözüm olur.

ÖZDEĞER PROBLEMİ

Lineer cebirsel denklem sistemleri için $\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}$ biçimindeki matris denklemleri ve özdeğer ve özvektörler verirler. Buna benzer olarak sınır-değer problemleri için de özdeğer problemi vardır. Aşağıdaki homojen diferansiyel denklemi düşünelim

$y'' + \lambda\, y = 0 \quad y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$

Önceki örneklerde görüldüğü gibi, $\lambda = 2$ için sadece aşikâr çözüm vardır ve $\lambda = 1$ için aşikâr çözümün yanında sonsuz çözüm de vardır. Aşikâr çözüm vermeyen λ değerleri için özdeğerler denir. Bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlere de özfonksiyonlar denir. Örneğin, $\lambda = 1$ özdeğeri için $\sin(x)$ bir özfonksiyondur.

Örnek olarak, $y'' + \lambda\, y = 0,\ y(0) = 0$ ve $y(\pi) = 0$ sınır-değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulmak için bütün $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ durumlarında denklemi çözelim.

ÖRNEK

$y'' + \lambda\, y = 0 \quad y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$ sınır-değer problemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulun.

Çözüm:

Artı λ değerleri

İlk olarak $\lambda > 0$ için $\lambda = \mu^2$ alıyoruz böylece artı olması garantilenir. Denklem şöyle olur.

$y'' + \mu^2\, y = 0 \quad y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$

Genel çözüm şöyledir. $y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için $0 = c_2 \sin(\mu\pi)$ olur. Burada $c_2 \neq 0$ olmasını istiyoruz çünkü aşikâr çözüm istemiyoruz, $\sin(\mu\pi) = 0$ olmalıdır. Sinüs fonksiyonu π 'nin tam katları için sıfır verir. Bu nedenle $\mu = n$ olmalıdır ve n tamsayıdır.

Sonuçta $\lambda = \mu^2 = n^2$ olmalıdır ve $\lambda > 0$ için $n = 1, 2, 3, \ldots$ olur. Artık $\lambda = n^2$ sayıları denklemin özdeğerleridir. İlk koşuldan çözüm $y(x) = c_2 \sin(\mu x)$ çıkmıştı. İkinci koşul ile, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için, $y(x) = c_2 \sin(nx)$ olur. Özfonksiyonların bir katsayı ile çarpımı önemli değildir,

denklemde yine aynı özdeğeri verir. Burada $c_2 = 1$ düşünerek özfonksiyonlar $y_n(x) = \sin(nx)$ olarak alınır.

Sırayla, $\lambda = 1$ için $y(x) = \sin(x)$ olur, $\lambda = 4$ için $y(x) = \sin(2x)$ olur, $\lambda = 9$ için $y(x) = \sin(3x)$ olur, …, ve $\lambda = n^2$ için $y(x) = \sin(nx)$ olur.

Eksi λ değerleri

Şimdi $\lambda < 0$ için $\lambda = -\mu^2$ alıyoruz böylece eksi olması garantilenir. Denklem şöyle olur.

$y'' - \mu^2 y = 0 \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$

Genel çözüm şöyledir. $y(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \sinh(\mu x)$

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$ olur.

İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için $0 = c_2 \sinh(\mu\pi)$ olur. Burada $c_2 \neq 0$ olmasını istiyoruz çünkü aşikâr çözüm istemiyoruz. Fakat $\sinh(\mu\pi) = 0$ olması için $\mu = 0$ olmalıdır. Başka sıfır yapan μ değeri yok. Başta $\lambda = -\mu^2 < 0$ almıştık ve μ sayısı sıfır olamaz. Bu nedenle özdeğer olabilecek herhangi bir λ değeri de yoktur. Sonuçta $\lambda < 0$ içim bir özdeğer yoktur.

Sıfır λ değeri

Son olarak $\lambda = 0$ için denklem şöyle olur. $y'' = 0 \quad y(0) = 0, \; y(\pi) = 0$

Genel çözüm şöyledir. $y(x) = c_1 x + c_2$

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \rightarrow c_2 = 0$ olur. İkinci koşul $y(\pi) = 0$ için $0 = c_1 \cdot \pi \rightarrow \; c_1 = 0$ olur.

Sonuçta $y(x) = 0$, aşikar çözüm çıkar. Fakat biz aşikar olmayan çözüm arıyoruz ve $\lambda = 0$ özvektör değildir ve özfonksiyonu yoktur.

Sonuç olarak, $n = 1, 2, 3, \ldots$ için, $\lambda = n^2$ özdeğerler ve $y_n(x) = \sin(nx)$ özfonksiyonlardır.

Değişik Periyotlar için Çözüm

Eğer ikinci koşulun noktası π değil L alınırsa çözüm nasıl olacağına örneklerle bakalım.

ÖRNEK

$y'' + \lambda\, y = 0 \quad y(0) = 0,\ \ y(L) = 0$ sınır-değer problemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulun.

Çözüm: Yine $\lambda > 0$ için çözüm arıyoruz, $\lambda = \mu^2$ olsun. Diğer durumlarda önceki örneklerdeki gibi çözüm çıkar. Genel çözüm şöyledir.

$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$ olur.

İkinci koşul $y(L) = 0$ için $0 = c_2 \sin(\mu L)$ olur. Burada $c_2 \neq 0$ olmasını istiyoruz çünkü aşikâr çözüm istemiyoruz. Dolayısıyla $\sin(\mu L) = 0$ olmalıdır. Sinüs fonksiyonu π 'nin tam katları için sıfır verir. Bu nedenle $\mu L = n\pi$ olmalıdır ve $\lambda = \ \mu^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ olur. Burada n tamsayıdır. Her n tamsaısı için bir λ_n özdeğeri tanımlıdır. Bu karşılık da $y_n(x)$ özdeğerleri bulunur.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \qquad y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Diğer $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ durumlarından yine çözüm çıkmaz.

Farklı sınır koşulları için çözüm benzer biçimdedir. Bunları örneklerle görelim.

ÖRNEK

$y'' + \lambda\, y = 0 \quad y(0) = 0,\ \ y'(L) = 0$ sınır-değer problemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulun.

Çözüm: İkinci koşulun türev ile verildiğine dikkat edin.

$\lambda > 0$ için $\lambda = \mu^2$ olsun. $y'' + \mu^2\, y = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$ olur.

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$ olur ve $y(x) = c_2 \sin(\mu x)$ olur.

İkinci koşul için türev gerekir, $y'(x) = c_2 \mu \cos(\mu x)$ olur. İkinci koşulu uygularsak $y'(L) = 0$ için $0 = \ c_2 \mu \cos(\mu L)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_2 \neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\cos(\mu L) = 0$ olmalıdır. Kosinüs fonksiyonu $\pi/2$ 'nin tek katlarında sıfır olur. Bu nedenle $\mu L = \ (2n - \ 1)\, \pi/2$ olmalıdır ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ tamsayı değerlerini alır.

Çözüme $\mu = \sqrt{\lambda}$ koyalım ve her n için tanımlı olduğundan λ_n yazarsak $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$ olur. Özfonksiyonlar için çözümde $y(x) = c_2 \sin(\mu x)$ ifadesinde $c_2 = 1$ alırız ve μ ifadesini yazarız ve $y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$ buluruz.

$\lambda = 0$ için denklem $y'' = 0$ olur ve genel çözüm iki kere integral alınarak $y(x) = c_1 x + c_2$ olarak bulunur.

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cdot 0 + c_2 = c_2 \rightarrow c_2 = 0$ olur.

İkinci koşul için türev almak gerekir, $y'(x) = c_1$, ve $y'(L) = 0$ için $c_1 = 0$ olur. Sonuçta $y(x) = 0$ aşikar çözümü çıkar, $\lambda = 0$ için özdeğer veya özvektör yoktur.

$\lambda < 0$ için $\lambda = -\mu^2$ olsun. $y'' - \mu^2 y = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \sinh(\mu x)$ olur.

İlk koşul $y(0) = 0$ için $0 = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 \rightarrow c_1 = 0$ ve $y(x) = c_2 \sinh(\mu x)$ olur. İkinci koşul için türev gerekir, $y'(x) = c_2 \mu \cosh(\mu x)$ olur. İkinci koşulu uygularsak $y'(L) = 0$ için $0 = c_2 \mu \cosh(\mu L)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_2 \neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\cosh(\mu L) = 0$ olmalıdır. Kosinüs hiperbolik fonksiyonu için sıfır değer yoktur. Bu nedenle $\lambda < 0$ için özdeğer veya özvektör yoktur. Özdeğerler ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2, \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ÖRNEK

$y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0, \; y(L) = 0$ sınır-değer problemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulun.

Çözüm: Birinci koşulun türev ile verildiğine dikkat edin.

$\lambda > 0$ için $\lambda = \mu^2$ olsun. $y'' + \mu^2 y = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$ olur. Türevini alırsak $y'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x)$ çıkar.

İlk koşul $y'(0) = 0$ için $0 = -c_1 \mu \sin(0) + c_2 \mu \cos(0) = -c_1 \mu \cdot 0 + c_2 \mu \cdot 1 = c_2 \mu \rightarrow c_2 = 0$ olur. Denklem $y(x) = c_1 \cos(\mu x)$ olur.

İkinci koşul $y(L)=0$ için $0=c_1\cos(\mu L)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_1\neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\cos(\mu L)=0$ olmalıdır. Kosinüs fonksiyonu $\pi/2$ 'nin tek katlarında sıfır olur. Bu nedenle $\mu L=(2n-1)\pi/2$ olmalıdır ve $n=1,2,3,\ldots$ tamsayı değerlerini alır. Çözüme $\mu=\sqrt{\lambda}$ koyalım ve her n için tanımlı olduğundan λ_n yazarsak $\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2$ olur. Özfonksiyonlar için çözümde $y(x)=c_1\cos(\mu x)$ ifadesinde $c_1=1$ alırız ve μ ifadesini yazarız ve $y_n(x)=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right)$ buluruz.

$\lambda=0$ için denklem $y''=0$ olur ve genel çözüm iki kere integral alınarak $y(x)=c_1x+c_2$ olarak bulunur ve türevi $y'(x)=c_1$ olur.

İlk koşul $y'(0)=0$ için $c_1=0$ bulunur ve $y(x)=c_2$ olur. İkinci koşul $y(L)=0$ için $y(L)=c_2=0$ olur. Sonuçta $y(x)=0$ aşikar çözümü çıkar, $\lambda=0$ için özdeğer veya özvektör yoktur.

$\lambda<0$ için $\lambda=-\mu^2$ olsun. $y''-\mu^2y=0$ için genel çözüm $y(x)=c_1\cosh(\mu x)+c_2\sinh(\mu x)$ olur. Türevini alırsak $y'(x)=c_1\mu\sinh(\mu x)+c_2\mu\cosh(\mu x)$ çıkar.

İlk koşul $y'(0)=0$ için $0=c_1\mu\sinh(0)+c_2\mu\cosh(0)=c_1\mu\cdot 0+c_2\mu\cdot 1=c_2\rightarrow c_2=0$ ve $y(x)=c_1\cosh(\mu x)$ olur.

İkinci koşul $y(L)=0$ için $0=c_1\cosh(\mu L)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_1\neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\cosh(\mu L)=0$ olmalıdır. Kosinüs hiperbolik fonksiyonu için sıfır değer yoktur. Bu nedenle $\lambda<0$ için özdeğer veya özvektör yoktur. Özdeğerler ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda_n=\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2,\quad y_n(x)=\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}x\right),\quad n=1,2,3,\ldots$$

ÖRNEK

$y''+\lambda y=0\quad y'(0)=0,\ y'(L)=0$ sınır-değer problemi için özdeğerleri ve özfonksiyonları bulun.

Çözüm: İkinci koşulun türev ile verildiğine dikkat edin.

$\lambda>0$ için $\lambda=\mu^2$ olsun. $y''+\mu^2y=0$ için genel çözüm $y(x)=c_1\cos(\mu x)+c_2\sin(\mu x)$ olur. Türevini alırsak $y'(x)=-c_1\mu\sin(\mu x)+c_2\mu\cos(\mu x)$ çıkar.

İlk koşul $y'(0) = 0$ için $0 = c_1\mu\sin(0) + c_2\mu\cos(0) = c_1\mu \cdot 0 + c_2\mu \cdot 1 = c_2\mu \rightarrow c_2 = 0$ olur. Denklem $y(x) = c_1\cos(\mu x)$ olur.

İkinci koşul $y'(L) = 0$ için $0 = -c_1\mu\sin(\mu x)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_2 \neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\sin(\mu L) = 0$ olmalıdır. Sinüs fonksiyonu π 'nin katlarında sıfır olur. Bu nedenle $\mu L = n\pi$ olmalıdır ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ tamsayı değerlerini alır. Çözüme $\mu = \sqrt{\lambda}$ koyalım ve her n için tanımlı olduğundan λ_n yazarsak $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ olur. Özfonksiyonlar için çözümde $y(x) = c_1\cos(\mu x)$ ifadesinde $c_1 = 1$ alırız ve μ ifadesini yazarız ve $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ buluruz.

$\lambda = 0$ için denklem $y'' = 0$ olur ve genel çözüm iki kere integral alınarak $y(x) = c_1x + c_2$ olarak bulunur ve türevi $y'(x) = c_1$ olur.

İlk koşul $y'(0) = 0$ için $c_1 = 0$ bulunur ve $y(x) = c_2$ olur.

İkinci koşul $y'(L) = 0$ için $0 = 0$ olur çünkü türev zaten sıfır ve c_2 serbest kalır ve $y(x) = c_2$ olur. Sonuçta birer özdeğer ve özfonksiyonumuz vardır ve $\lambda_0 = 0$ için $y_0(x) = 1$ yazarız.

$\lambda < 0$ için $\lambda = -\mu^2$ olsun. $y'' - \mu^2 y = 0$ için genel çözüm $y(x) = c_1\cosh(\mu x) + c_2\sinh(\mu x)$ olur. Türevini alırsak $y'(x) = c_1\mu\sinh(\mu x) + c_2\mu\cosh(\mu x)$ çıkar.

İlk koşul $y'(0) = 0$ için $0 = c_1\mu\sinh(0) + c_2\mu\cosh(0) = c_1\mu \cdot 0 + c_2\mu \cdot 1 = c_2 \rightarrow c_2 = 0$ ve $y(x) = c_1\cosh(\mu x)$ olur.

İkinci koşul $y'(L) = 0$ için $0 = c_1\mu\sinh(\mu L)$ olur. Aşikar çözüm istemediğimiz için $c_1 \neq 0$ olması gerekir. Denklemin sağlanabilmesi için $\sinh(\mu L) = 0$ olmalıdır. Sinüs hiperbolik fonksiyonu için sıfır değer sadece sıfırdadır ve $\mu = 0$ olmalıdır. Fakat $\lambda = -\mu^2 < 0$ olduğundan sıfır çözüm olamaz. Bu nedenle $\lambda < 0$ için özdeğer veya özvektör yoktur. Özdeğerler ve özfonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$$\lambda_0 = 0,\ y_0(x) = 1 \quad \text{ve} \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

İkisini birleştirebiliriz çünkü $n = 0$ için $\lambda_0 = \left(\frac{0\pi}{L}\right)^2 = 0$ ve $y_0(x) = \cos\left(\frac{0\pi}{L}x\right) = \cos(0) = 1$ olur.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ n = 0,1, 2, 3, \ldots$$