RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

INS313 YAPI STATİĞİ-I

Dr. Öğr. Üyesi Zeliha TONYALI

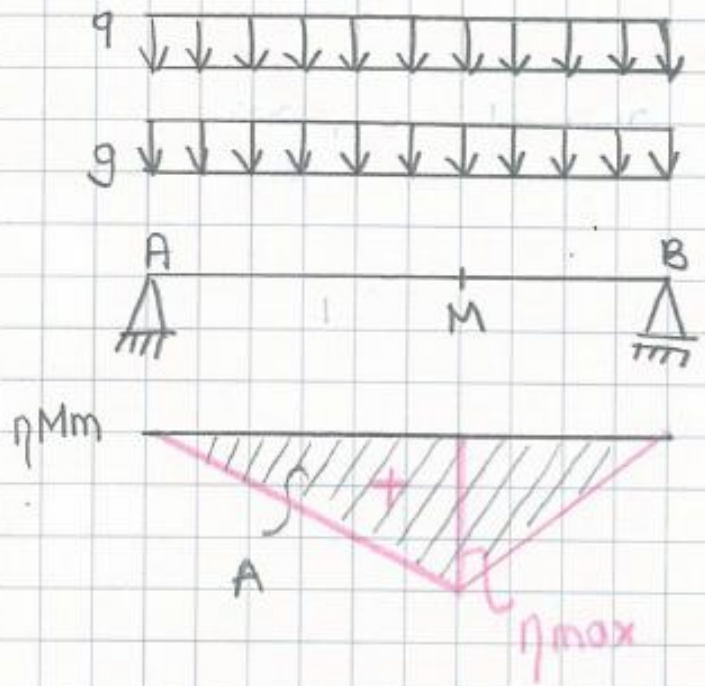
‘’12H. TESİR ÇİZGİLERİ
BASİT KİRİŞ MAX VE MİN KONUMLAR”

Hareketli yüklere göre Hesap!

* Hareketli yüklerin sistem üzerindeki konumları değişkendir.
* Hareketli yükler etkisindeki bir yapı boyutlandırılırken, sistemin her kesitinde, hareketli yüklerden oluşan en elverişsiz (maksimum ve minimum) kesit zorlarının hesaplanması gerekir.
* Hareketli yüklerden oluşan en elverişsiz büyüklükler genel olarak araştırma ile bulunabilir. Bunun için hareketli yük sistem üzerinde hareket ettirilerek yükün her konumu için aranan büyüklüğün değeri hesaplanır. Bunun için tesir çizgilerinden faydalanılır. 1 kN'luk kuvvet sistem üzerinde hareket ettirilerek kuvvetin her konumu için aranan büyüklük hesaplanır. ve bu değerlerden yararlanarak tesir çizgisi diyagramı elde edilir.
* Tesir çizgisi diyagramı çizildikten sonra, bu diyagramdan faydalanarak * verilen bir yükleme için söz konusu büyüklük
  * verilen bir hareketli yük için söz konusu büyüklüğün alacağı en elverişsiz değerler kolayca hesaplanır.

Max ve Min Statik Büyüklükleri veren Hareketli Yük Konumları

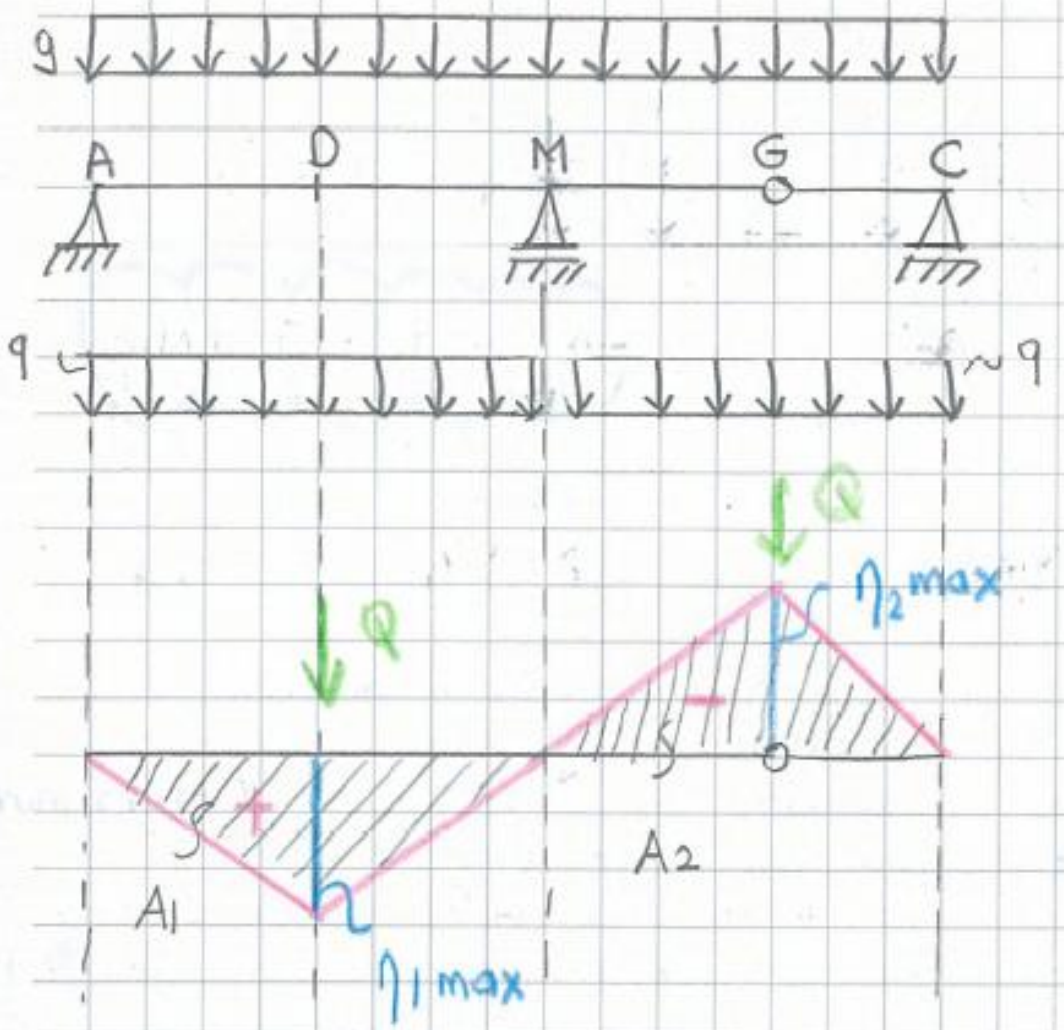
Eğilme momentleri Herhangibir kesitteki eğilme momentlerinin max ve min değerlerini veren katar yükünün genel konumu genel olarak tesir çizgileri üzerinde araştırma yapılarak bulunabilir.



$$Mm\,max = g \cdot A + q \cdot A$$

$$Mm\,min = g \cdot A + 0$$

g - Kirişin kendi ağırlığı (sabit)
q - hareketli yük



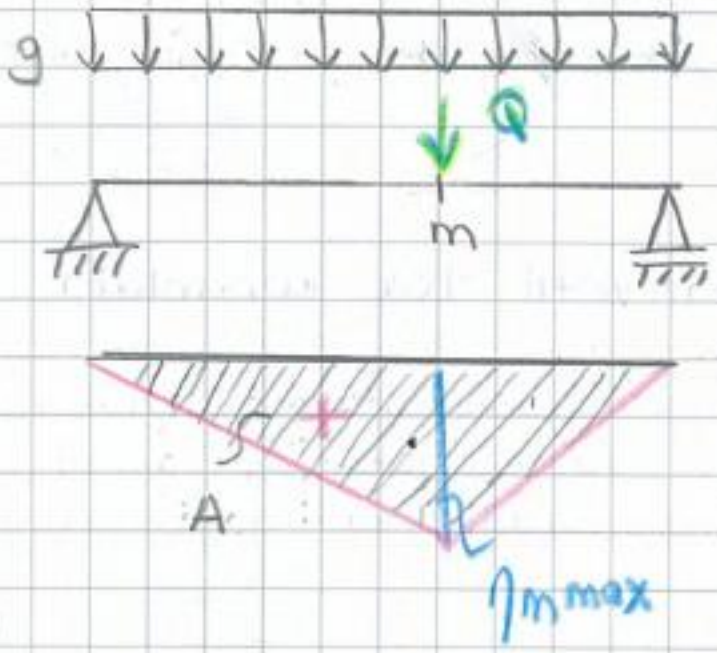
$|A_1| > |A_2|$ olsun

$$M_D\,max = g\cdot(A_1 - A_2) + q\cdot A_1$$

$$M_D\,min = g\cdot(A_1 - A_2) - q\cdot A_2$$

min olması için tesir çizgisi diyagramında (-) olan bölgeye yükü uyguluyoruz.

Tekil hareketli yük



$$M_{m\,max} = g \cdot A + Q \cdot \eta_{m\,max}$$

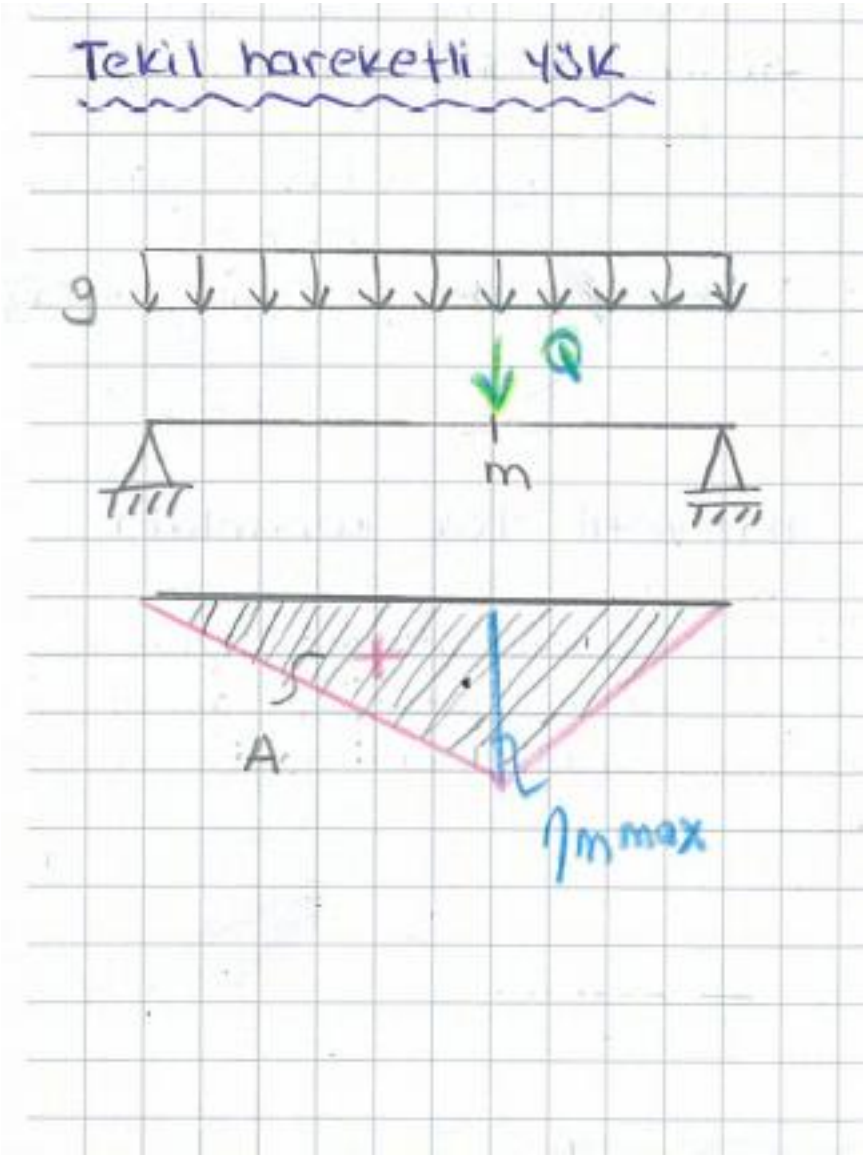
$$M_{m\,min} = g \cdot A + 0$$

(Yukarıda verilen yüklemeye göre)

$$M_{D\,max} = g \cdot (A_1 - A_2) + Q \cdot \eta_{1\,max}$$

$$M_{D\,min} = g \cdot (A_1 - A_2) - Q \cdot \eta_{2\,max}$$

Tekil hareketli YÜK

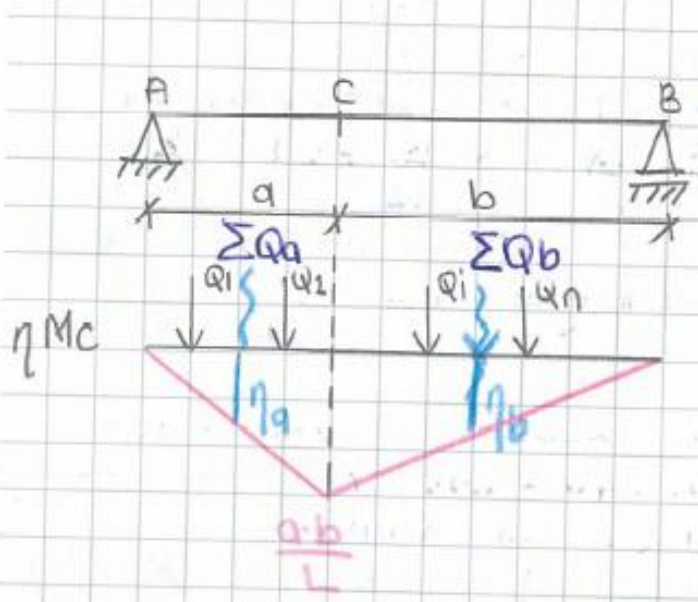


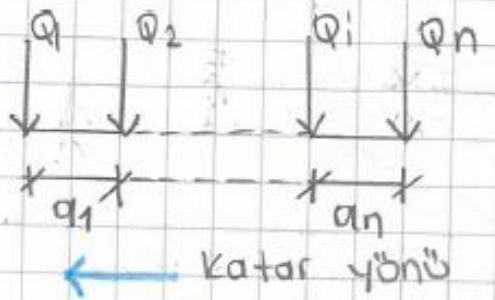
q ve Q'nun birleşimi sonucu :

$$M_{m\,max} = g \cdot A + q \cdot A + Q \cdot \eta_{m\,max}$$

$$M_{m\,min} = g \cdot A + 0 + 0$$

Aralık ve şiddetleri eşit olan Tekil yüklerden oluşan yük





$$\Sigma Mc = \Sigma Qa \cdot \eta_a + \Sigma Qb \cdot \eta_b$$

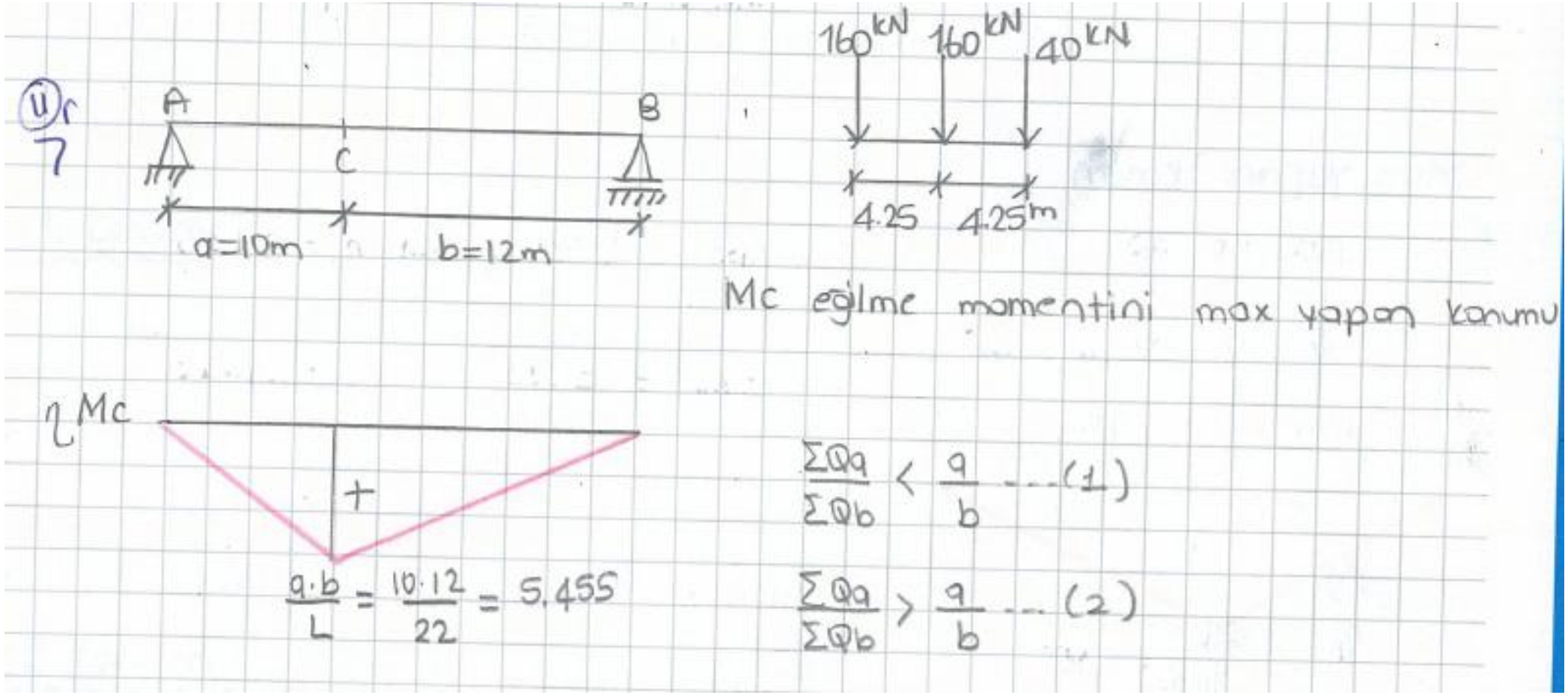
$$\frac{\Sigma Qa}{a} < \frac{\Sigma Qb}{b} \Rightarrow * \frac{\Sigma Qa}{\Sigma Qb} < \frac{a}{b} \quad (1)$$

Max yapan konumdan biraz önce

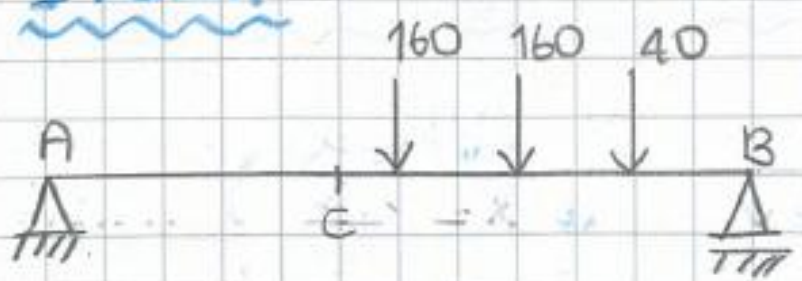
$$\frac{\Sigma Qa}{a} > \frac{\Sigma Qb}{b} \Rightarrow * \frac{\Sigma Qa}{\Sigma Qb} > \frac{a}{b} \quad (2)$$

Max yapan konumdan biraz sonra

* (2) konumu elde ettiğimiz zaman yüklememiz MAX olur.


Ör 7
A
C
B
a=10m
b=12m
160 kN
160 kN
40 kN
4.25
4.25 m
Mc eğilme momentini max yapan konumu
ηMc
+
$\frac{a \cdot b}{L} = \frac{10 \cdot 12}{22} = 5.455$
$\frac{\Sigma Q_a}{\Sigma Q_b} < \frac{a}{b}$ ... (1)
$\frac{\Sigma Q_a}{\Sigma Q_b} > \frac{a}{b}$ ... (2)

1 Konum

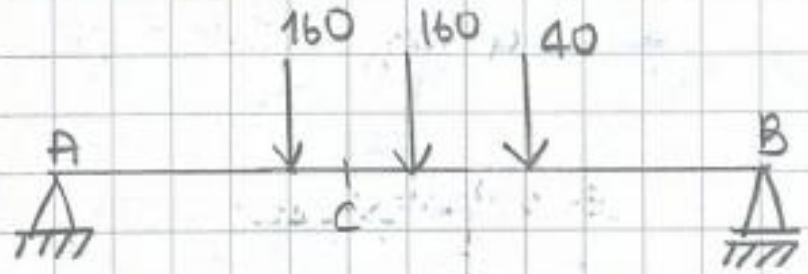


$\Sigma Q_a = 0$

$\Sigma Q_b = 160+160+40 = 360\ kN$

$\frac{\Sigma Q_a}{\Sigma Q_b} < \frac{a}{b} \Rightarrow 0 < \frac{10}{12} = 0{,}83$ ✗

2 Konum

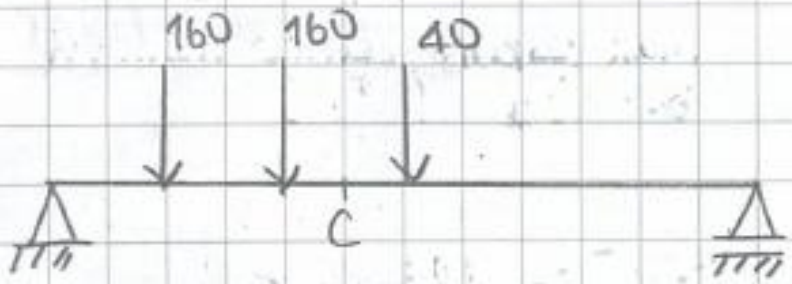


$\Sigma Q_a = 160\ kN$

$\Sigma Q_b = 160+40 = 200\ kN$

$\frac{160}{200} < \frac{10}{12} \rightarrow 0{,}8 < 0{,}83$ ✗

3. Konum



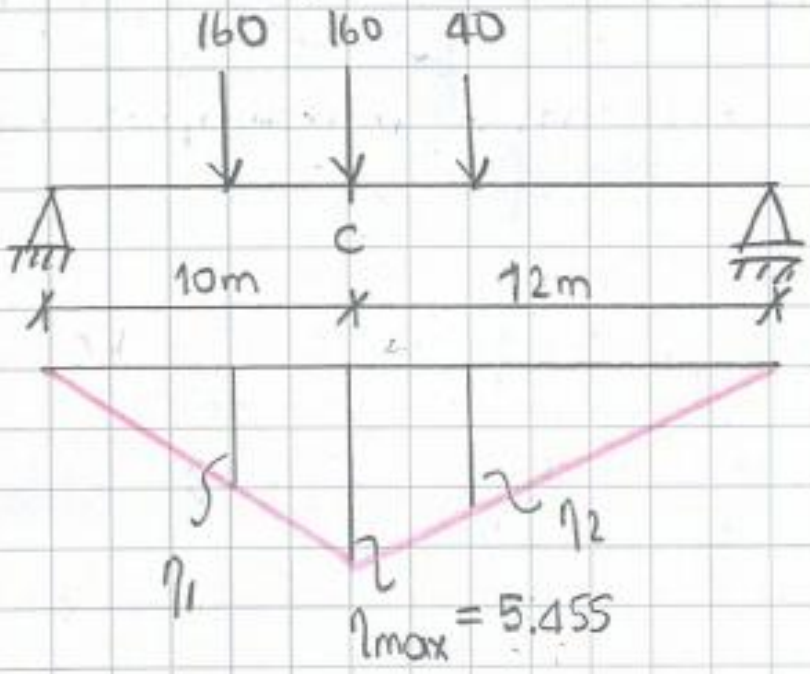
$\Sigma Q_a = 160 + 160 = 320\ kN$

$\Sigma Q_b = 40\ kN$

$\frac{320}{40} < \frac{10}{12} \Rightarrow 8 > 0{,}83$ ✓

(Sağladığı için max yapan yükü C noktasına koyarız. Yük A'nın büyük değerlerine yakın olmalı

Max Yapan Konum



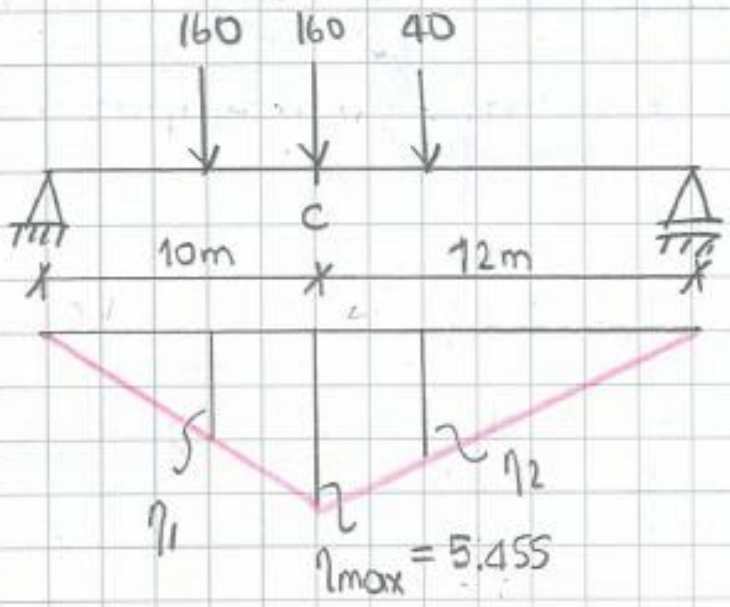
$$\frac{\eta_1}{5.455} = \frac{10 - 4{,}25}{10} \rightarrow \eta_1 = 3{,}136$$

$$\frac{\eta_2}{5.455} = \frac{12 - 4{,}25}{12} \qquad \eta_2 = 3{,}523$$

$$M_{cmax} = 160 \cdot 3{,}136 + 160 \cdot 5{,}455 + 40\ 3{,}523$$

$$M_{cmax} = 1515{,}5 \ \text{kNm}$$

Max yapan konum



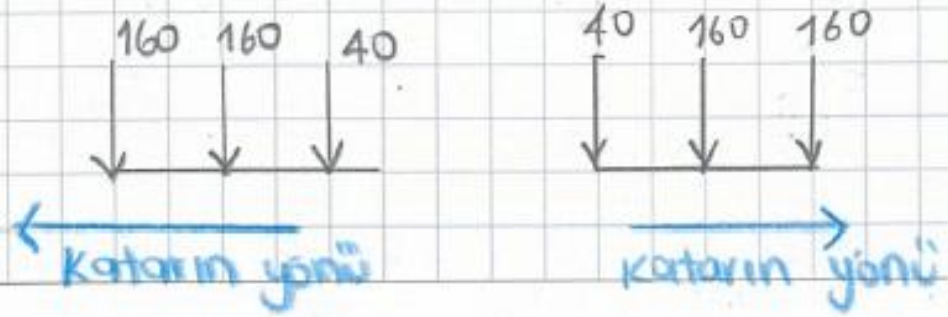
$$\frac{\eta_1}{5.455} = \frac{10-4,25}{10} \rightarrow \eta_1 = 3,136$$

$$\frac{\eta_2}{5,455} = \frac{12-4,25}{12} \qquad \eta_2 = 3,523$$

$$M_{cmax} = 160 \cdot 3,136 + 160 \cdot 5,455 + 40 \cdot 3,523$$

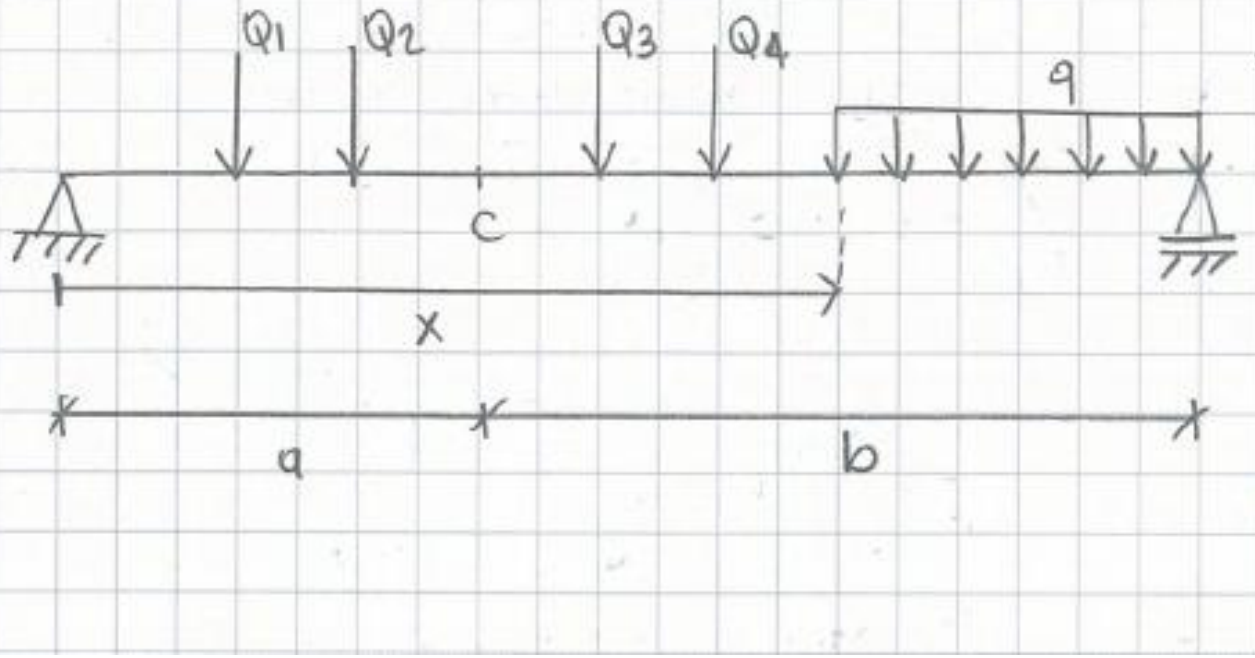
$$M_{cmax} = 1515,5 \text{ kNm}$$

$$M_{cmax} = 40 \cdot 3,136 + 160 \cdot 5,455 + 160 \cdot 3,523 = 1561,92 \text{ kNm}$$



* Kataın yönüne göre Mmax değişir.

* Tekil ve Düzgün yayılı yükten oluşan yük katarları

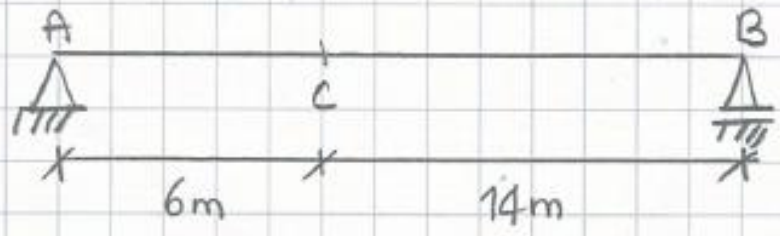


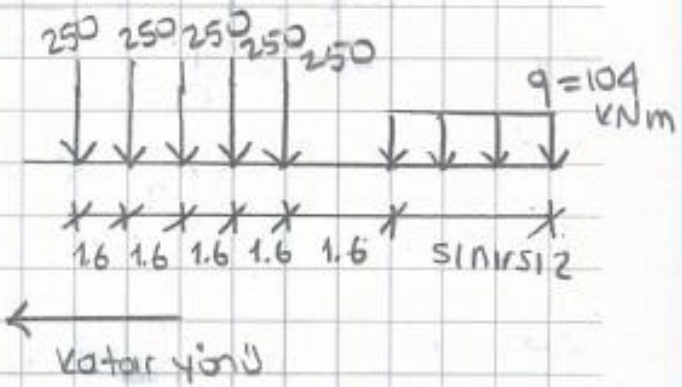
* $x = \frac{\Sigma Q}{q}$ bulunur

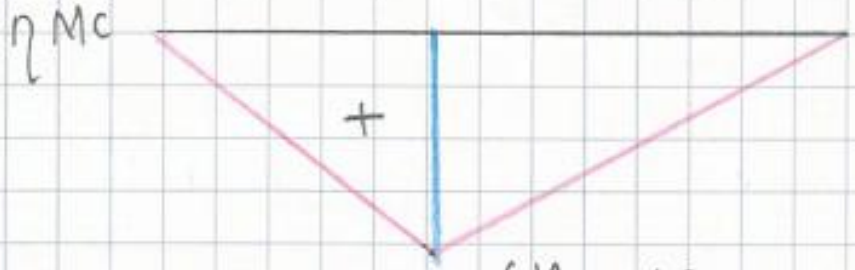
* x < a ise Mmax olur.

* x > a ise irdelemeyle bulunur.

Örn 7







$\frac{a \cdot b}{L} = \frac{6 \cdot 14}{20} = 4{,}2\,m$

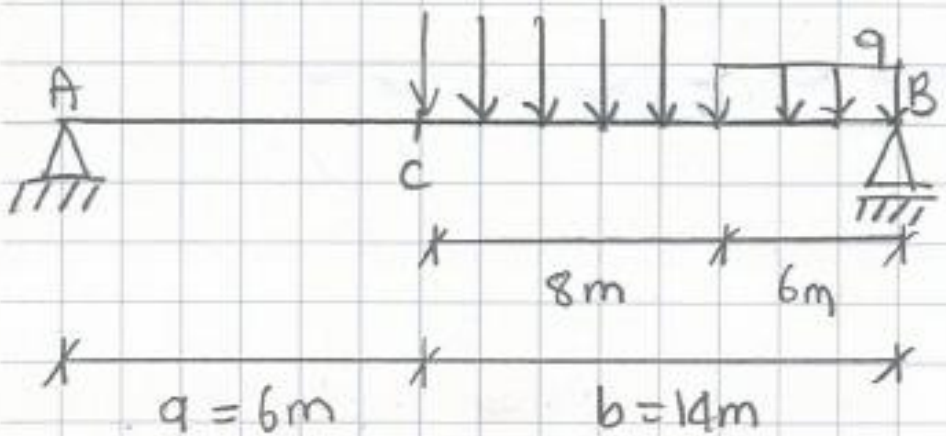
Max yapan eğilme momentini bulunuz (Mc)

$\Sigma Q = 250 \cdot 5 = 1250\,kN$, $q = 104$

$x = \frac{\Sigma Q}{q} = \frac{1250}{104} = 12{,}02\,m.$

$a = 6\,m$, $x > a$ old. için irdeleme yapılır

1. Konum

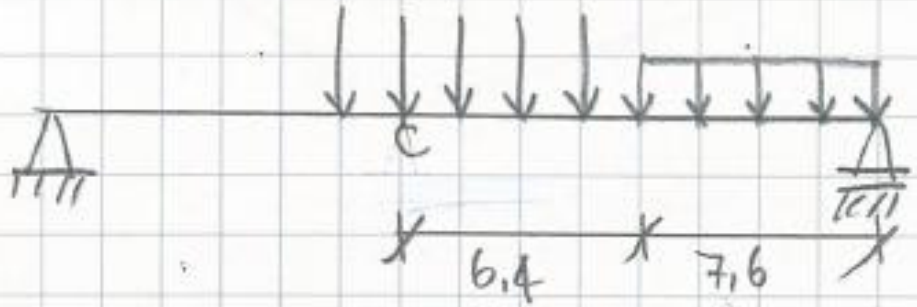


$\Sigma Qa = 0$

$\Sigma Qb = 250 \cdot 5 + 104 \cdot 6 = 1874$ kN

$\frac{\Sigma Qa}{\Sigma Qb} < \frac{a}{b} \rightarrow 0 < 0,429$ X

2. Konum

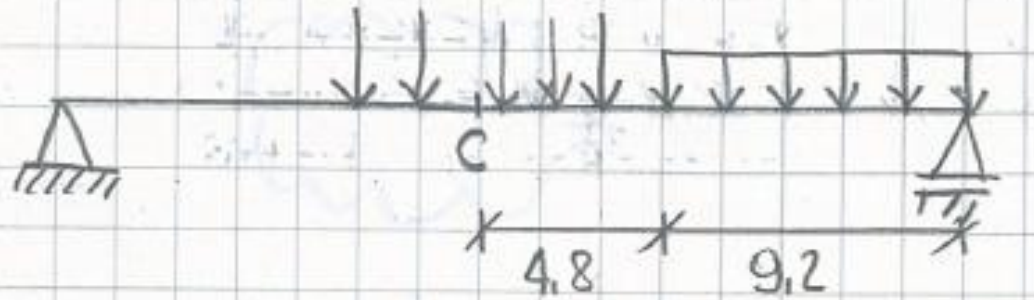


$\Sigma Qa = 250$

$\Sigma Qb = 250 \cdot 4 + 104 \cdot 7,6 = 1790,4$

$\frac{\Sigma Qa}{\Sigma Qb} < \frac{a}{b} \rightarrow 0,14 < 0,429$ X

3. Konum

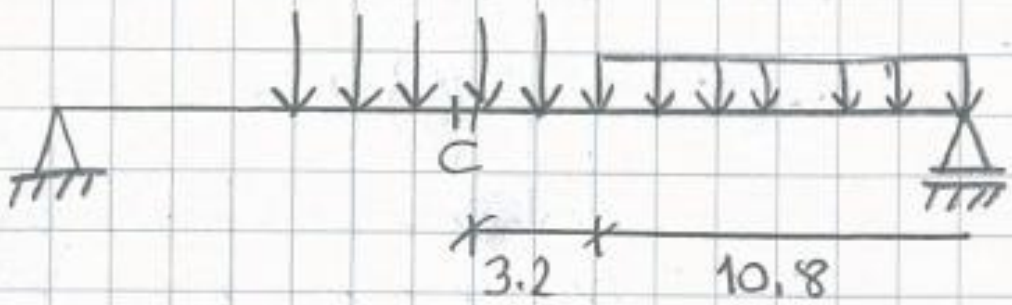


$\Sigma Q_a = 250 \cdot 2 = 500$ kN

$\Sigma Q_b = 250 \cdot 3 + 104 \cdot 9,2 = 1706,8$ kN

$\frac{\Sigma Q_a}{\Sigma Q_b} < \frac{a}{b} \rightarrow 0,293 < 0,429$ ✗

4 konum

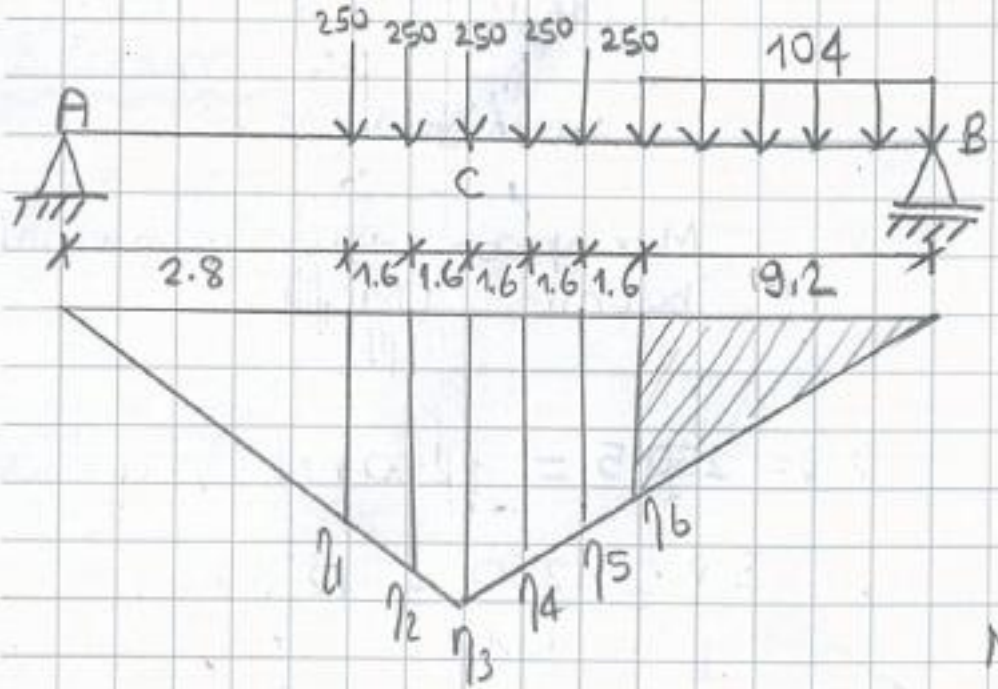


$\Sigma Q_a = 250 \cdot 3 = 750$ kN

$\Sigma Q_b = 250 \cdot 2 + 104 \cdot 10,8 = 1623$ kN

$\frac{\Sigma Q_a}{\Sigma Q_b} < \frac{a}{b} \rightarrow 0,462 > 0,429$ ✓

(Bunun hemen öncesinde max yükleme olur)



$$\frac{a \cdot b}{L} = \frac{6 \cdot 14}{20} = 4{,}2$$

Max yapan yükleme

$$\frac{2{,}8}{6} = \frac{\eta_1}{4{,}2} \rightarrow \eta_1 = 1{,}96m \quad , \quad \eta_3 = 4{,}2m$$

$$\eta_2 = 3{,}08m \qquad \eta_4 = 3{,}72m$$

$$\eta_5 = 3{,}24m \qquad \eta_6 = 2{,}76$$

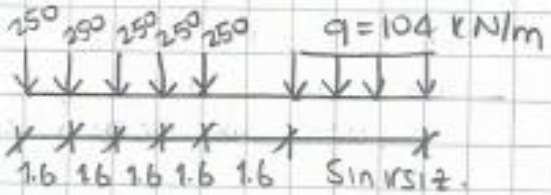
$$Mc = 250 \cdot (1{,}96 + 3{,}08 + 4{,}2 + 3{,}72 + 3{,}24) + 104 \cdot \left(\frac{2{,}76 \cdot 9{,}2}{2}\right)$$

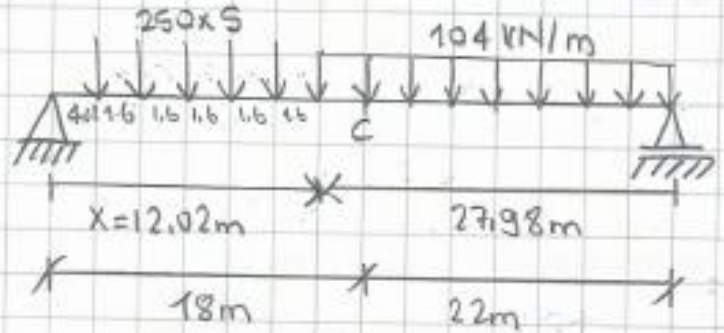
$$Mc_{max} = 5370{,}384 \ kNm$$

Ur 7



x → Başlangıç noktasından yayılı yüke kadar olan mesafe





$$X = \frac{\Sigma Q}{q} = \frac{250 \cdot 5}{104} = 12{,}02m$$

$X < a$ ise Mmax olur.

$12{,}02 < 18\,m$ ✓



$$\frac{4{,}02}{18} = \frac{\eta_1}{9{,}9} \rightarrow \eta_1 = 2{,}21 \quad , \eta_4 = 4{,}85$$

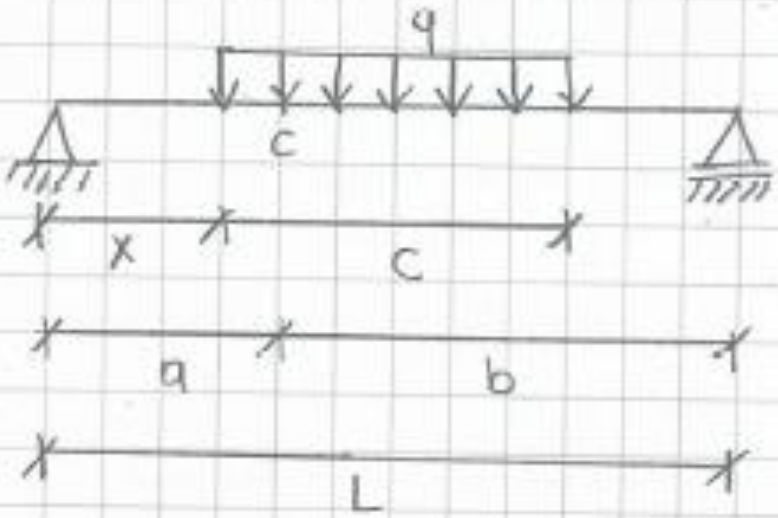
$\eta_2 = 3{,}1 \qquad \eta_5 = 5{,}73$

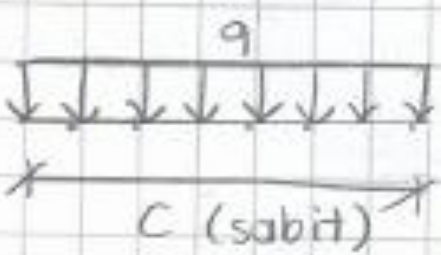
$\eta_3 = 3{,}97 \qquad \eta_6 = 6{,}61$

$$A = \frac{6{,}61 + 9{,}9}{2} \cdot 5{,}98 + 9{,}9 \cdot \frac{22}{2} = 158{,}26$$

$$Mc\,max = 250\,(2{,}21 + 3{,}1 + 3{,}97 + 4{,}85 + 5{,}73) + 104 \cdot 158{,}26 = 21424 \text{ kNm}$$

Sabit Uzunlukta Uniform Yayılı Yük





$$x = \frac{a \cdot (L - c)}{L}$$

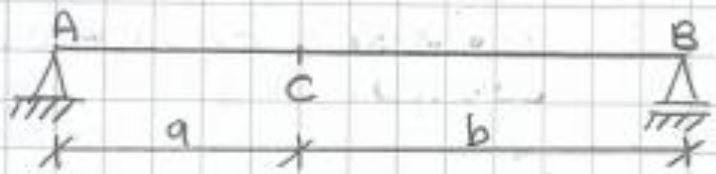
Max eğilme momentini verir.

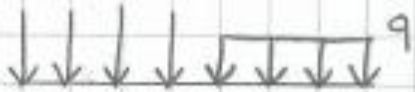
$$a\left(1 - \frac{c}{L}\right)$$



Kesme Kuvvetleri ve Mesnet Tepkisi

Max ve min değeri veren yükün konumu eğilme momentinde anlatıldığı gibi bulunur. Katar yükü konumunda ise basit kirişlerde olduğu gibi tesir çizgileri dik üçgen şeklindeyse yükleme eğilme momentinde old gibi olmaktadır.



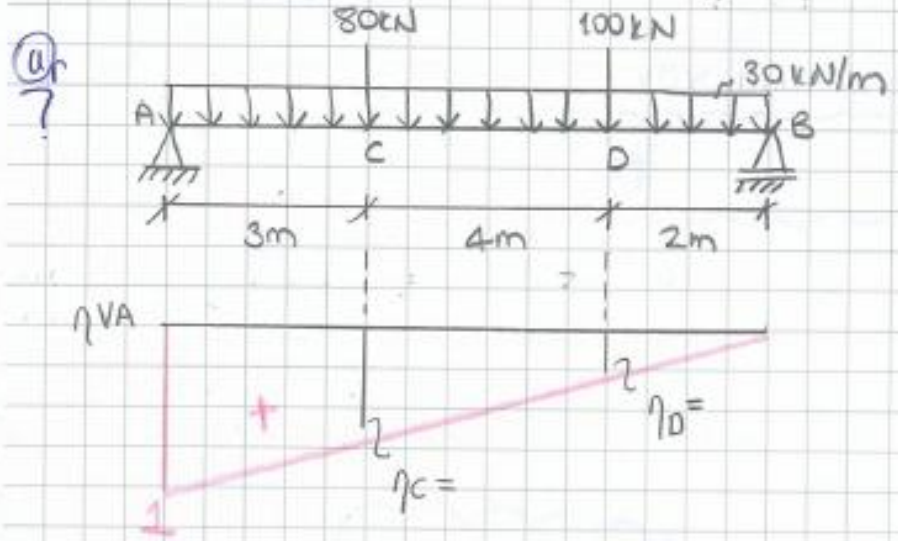




Max olması için AB aralığına yükleme yapılır.



Max olması için CB aralığına.
Min " " AC " yükleme yapılır.



ηVA, ηVB, ηVC, ηMC tesir çizgisi diyagramlarını çizip kesit etkilerini hesaplayınız.

$\frac{2}{9} = \frac{\eta_D}{1} \rightarrow \eta_D = 0,22$

$\frac{6}{9} = \frac{\eta_C}{1} \rightarrow \eta_C = 0,67$

* VA mesnet tepkisi

$VA = 80 \cdot 0,67 + 100 \cdot 0,22 + 1 \cdot \frac{9}{2} \cdot 30$

$VA = 210,6\ kN$

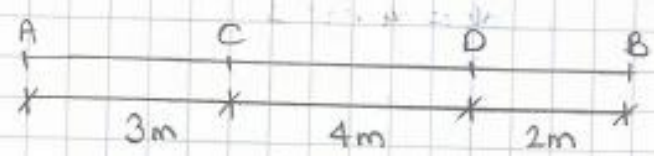
* VB mesnet tepkisi

$\frac{\eta_C}{1} = \frac{3}{9} \rightarrow \eta_C = 0,33$

$\frac{\eta_D}{1} = \frac{7}{9} \rightarrow \eta_D = 0,78$

$VB = 80 \cdot 0,33 + 100 \cdot 0,78 + 1 \cdot \frac{9}{2} \cdot 30$

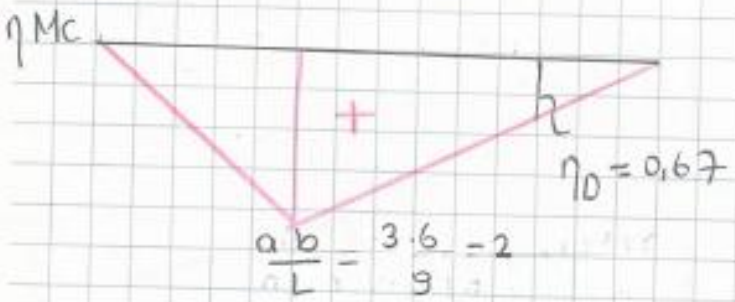
$VB = 239,4\ kN$



$\frac{a}{L} = \frac{3}{9} = 0{,}33$



$\frac{b}{L} = \frac{6}{9} = 0{,}67$



$\frac{a\,b}{L} = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2$

C Noktasındaki kesme kuvveti;

$\ast\ V_{CA} = 80 \cdot \left(\frac{6}{9}\right) + 100 \cdot \left(\frac{2}{9}\right) - 80 \cdot \left(3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) + 30\left(\frac{6}{9} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}\right)$

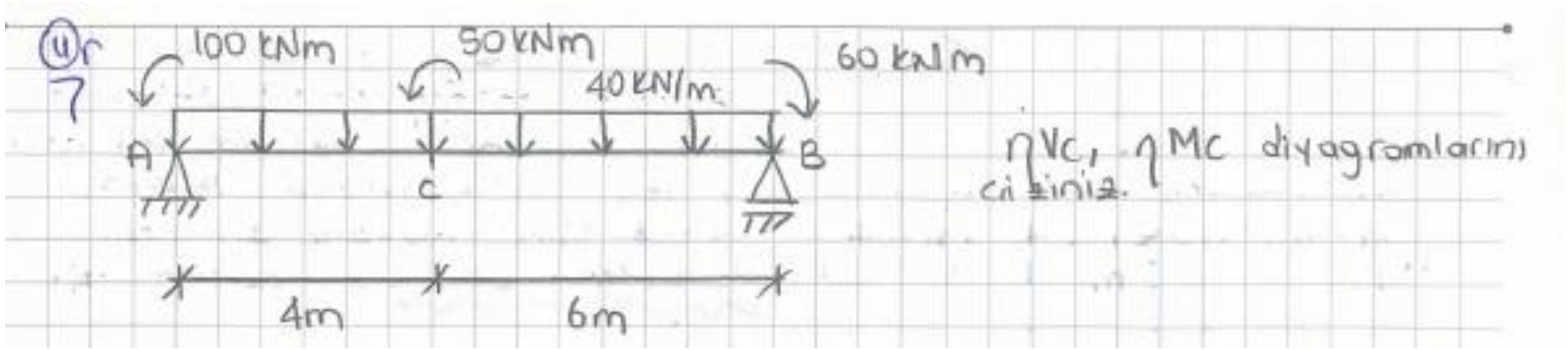
$V_{CA} = 120{,}56\ kN$

$\ast\ V_{CD} = 80 \cdot \left(-\frac{3}{9}\right) + 100 \cdot \left(\frac{2}{9}\right) - 30 \cdot \left(3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) + 30 \cdot \left(6 \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2}\right)$

$V_{CD} = 40{,}56\ kN$

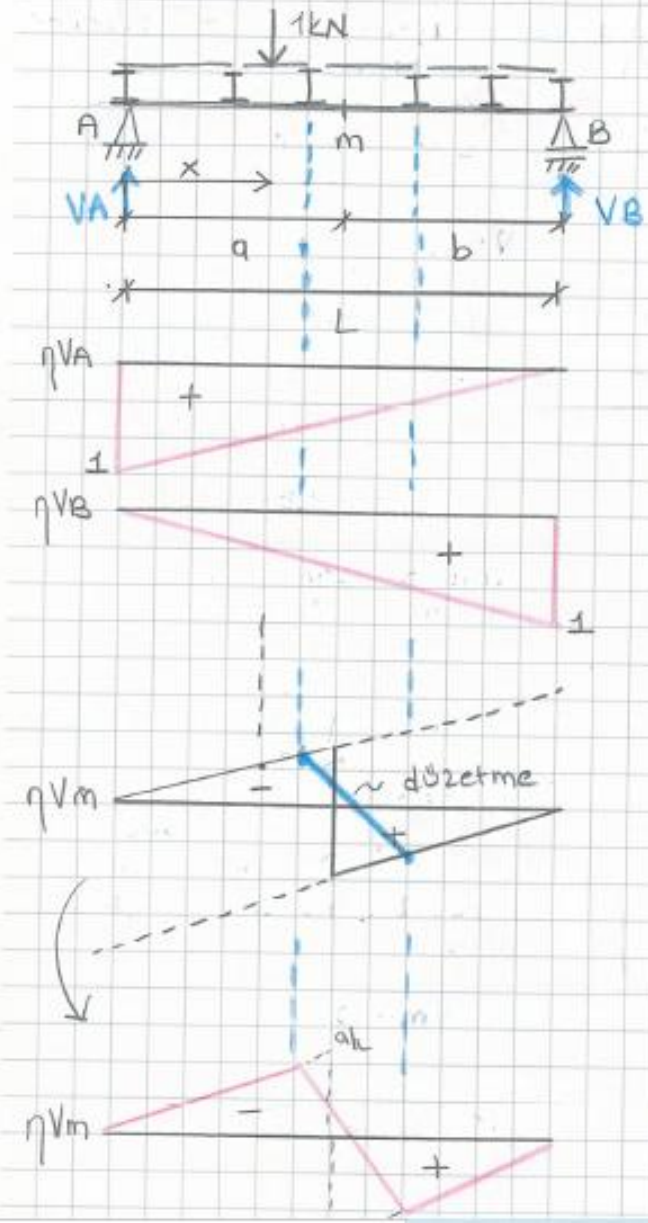
$M_C = 30 \cdot \left(\frac{2 \cdot 9}{2}\right) + 80 \cdot 2 + 100 \cdot 0{,}67 \Rightarrow M_C = 497\ kNm$

Ör 7



ηV_C, ηM_C diyagramlarını çiziniz.

Dolaylı (indirekt) Yükleme



A ve B mesnet tepkilerinin hesabı için yazılan denge denklemleri dolaylı yüklemeden bağımsız olduğu için, bunlara ait tesir çizgileri dolaysız yükleme gibidir.

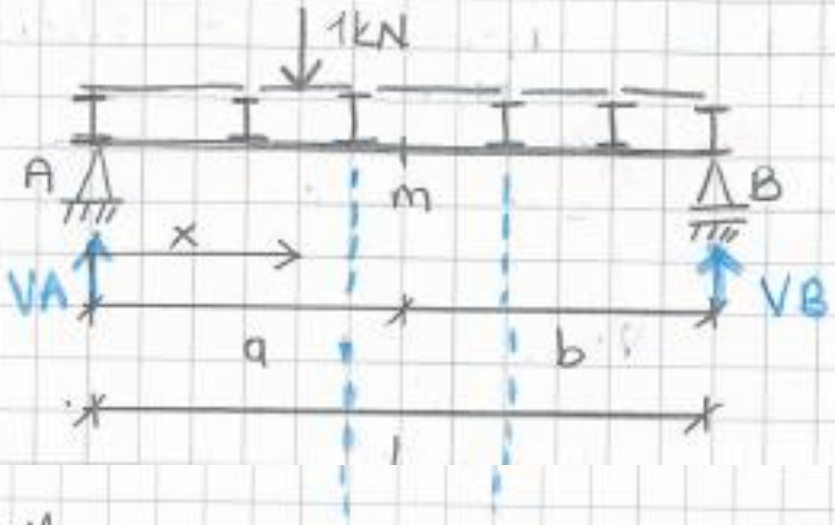
Tm ve Mm tesir çizgileri

a) m kesitinin iki yanındaki enlemelerin dışında dolaysız yüklemedeki tesir çizgileri geçerlidir.

b) m kesitinin iki yanındaki enlemelerin arasında, bu enlemelerden indirilen düşey doğruların tesir çizgisini kestiği noktalar bir doğru ile birleştirilerek düzeltme yapılır.

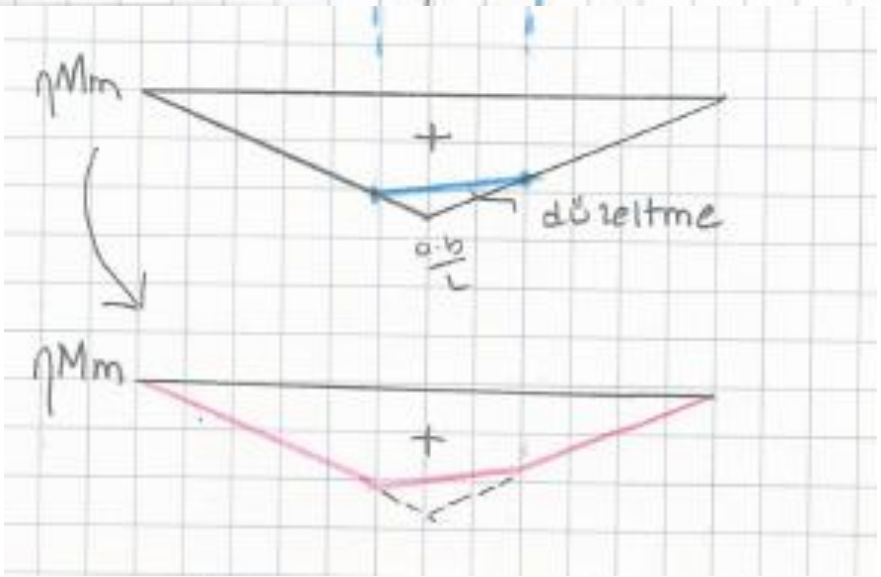
Bu düzeltme bütün dolaylı yüklemelerde benzer şekilde yapılır.

Dolaylı (indirekt) Yükleme

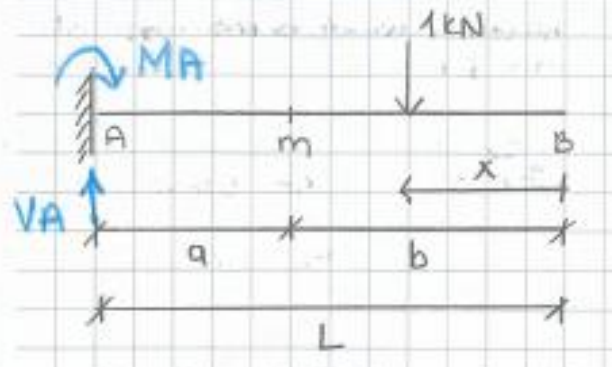


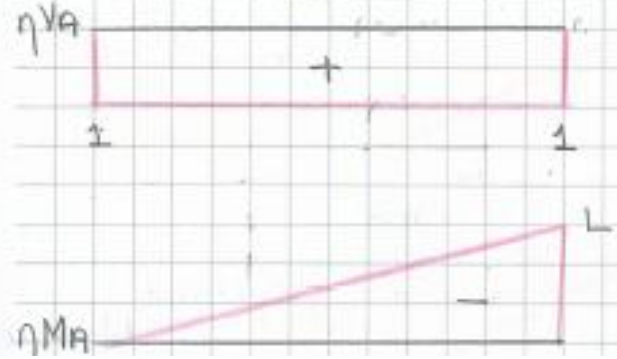
A ve B mesnet tepkilerinin hesabı için yazılan denge denklemleri dolaylı yüklemeden bağımsız olduğu için, bunlara ait tesir çizgileri dolaysız yükleme gibidir.

Tm ve Mm tesir çizgileri

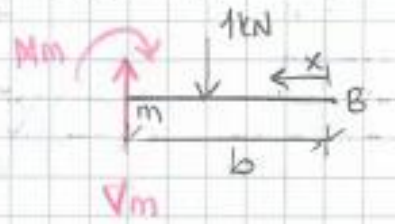


Konsol Kirişlerde Tesir Çizgileri





1 kN'luk kuvvet kesitin sağında;



Yük m-B Arasında

$\uparrow \Sigma Y=0 \quad Vm-1=0 \rightarrow Vm=1\ kN$

$\curvearrowright \Sigma Mm=0 \quad Mm+1\cdot(b-x)=0$

$Mm=-(b-x)$

$x=0$ için $Mm=-b$

$x=b$ " $Mm=0$

*Mesnet tepkileri

$\uparrow \Sigma Y=0 \Rightarrow VA-1=0 \rightarrow VA=1\ kN$

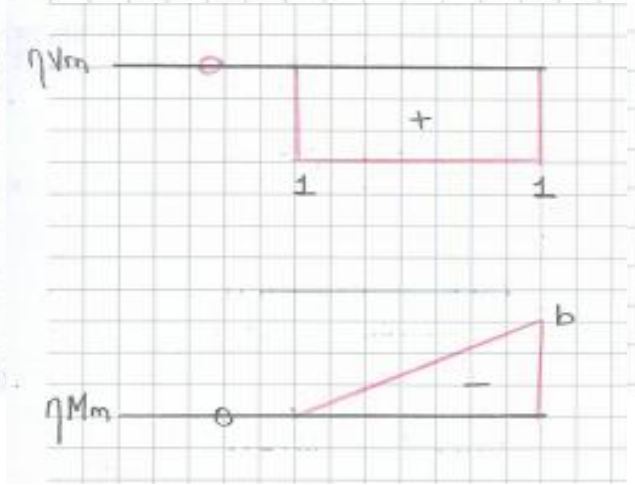
$\curvearrowright \Sigma MA=0 \Rightarrow MA+1(L-x)=0 \rightarrow MA=1(x-L)$

$x=0 \rightarrow MA=-L$

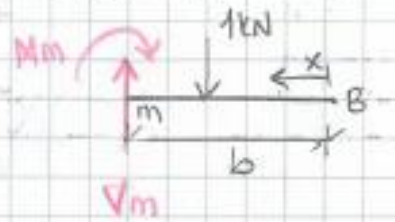
$x=L \rightarrow MA=0$

Konsol Kirişlerde Tesir Çizgileri





1 kN'luk kuvvet kesitin sağında;



yük m-B arasında

$\uparrow \Sigma Y = 0 \quad Vm - 1 = 0 \rightarrow Vm = 1\ kN$

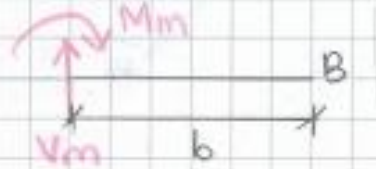
$\curvearrowright \Sigma Mm = 0 \quad Mm + 1 \cdot (b - x) = 0$

$Mm = -(b - x)$

$x = 0$ için $Mm = -b$

$x = b$ " $Mm = 0$

1 kN'luk kuvvet kesitin solunda ise;



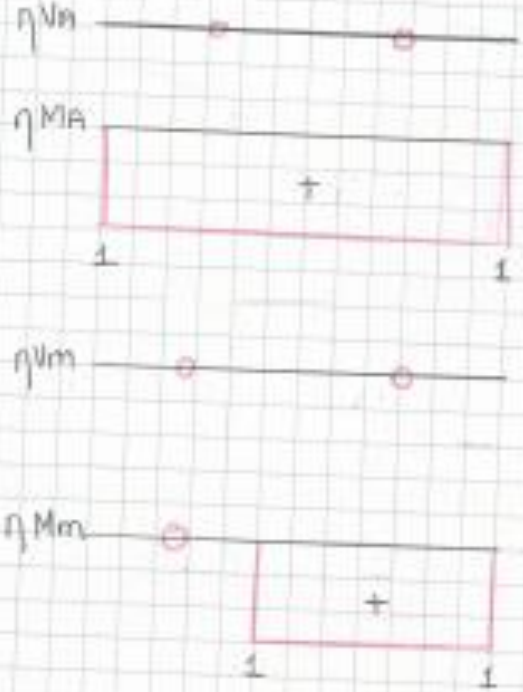
yük M-A arasında

$\Sigma Y = 0 \quad Vm = 0$

$\Sigma M = 0 \quad Mm = 0$

1 birimlik moment





* Mesnet kepkileri

Düşey kuvvet olmadığı için
ηVA = 0

$\curvearrowright \Sigma MA = 0 \quad MA - 1 = 0$

$MA = 1$ kN

1 kNm'lik moment kesitin sağında iken



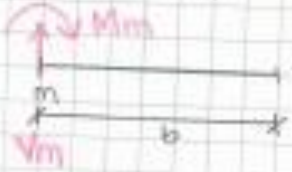
(YÜK m-B arasında)

$\Sigma Y = 0 \quad Vm = 0$

$\curvearrowright \Sigma Mm = 0 \quad Mm - 1 = 0$

$Mm = 1$ kN

1 kNm'lik moment kesitin solunda iken;



(YÜK A-M arasında)

$\curvearrowright \Sigma Mm = 0 \quad Mm = 0$

$\Sigma Y = 0 \quad Vm = 0$

KAYNAKLAR

1. **Ekiz, İ. Yapı Statiği I, Seç yayın Dağıtım, İstanbul, 1995.**
2. **KTU Yapı Statiği I ders notları**
3. **K. Girgin, M.G. Aksoylu, Y. Durgun, K. Darılmaz, Yapı Statiği, İzostatik Sistemler, Çözümlü Problemler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2011**
4. **İTÜ Yapı Statiği I ders notları**
5. Karadoğan F, Pala S, Yüksel E, Durgun Y, Yapı Mühendisliğine Giriş, Yapısal Çözümleme, 2011, No. 1, Vol. 1, İstanbul: Birsen Yayınevi
6. Çakiroglu, A., Çetmeli, E. Yapı statiği I, Beta Basım Yayım Dağıtım A.S., İstanbul, 1990.