KÜRESEL KOORDİNATLARDA LAPLACE DENKLEMİ

Küresel koordinatlarda Laplace denklemini şöyle bulmuştuk.

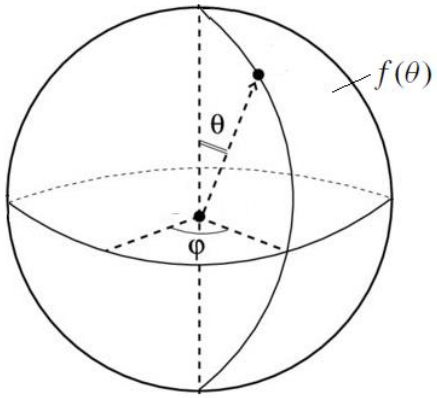
$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0$$

Üç boyutta $r = a$ yarıçaplı bir küre yüzeyinde tanımlanan Laplace denklemini çözmek değişkenlerine ayırma yöntemi kullanacağız. Elde edilen adi diferansiyel denklemler değişken katsayılıdır ve çözümleri özel fonksiyonlar türünden bulunur. İlk olarak daha kolay problem olan azimutal simetrik ϕ bağımsız duruma bakacağız. Daha sonra ϕ bağımlı genel durum için çözüm bulacağız.

AZİMUTAL SİMETRİK ÇÖZÜM

Yarıçapı $r = a$ olan kürenin yüzeyinde $f(\theta)$ sınır koşulu bulunsun. Koşulda ϕ bağımlılığı olmadığı için küreyi z ekseninde döndürürsek problem değişmez. Kürenin döndürülmesiyle bulacağımız çözüm değişmez çünkü her durumda aynı küredir. Dolayısıyla kürenin içinde ve dışındaki çözüm fonksiyonu $u(r,\theta)$ biçiminde ϕ bağımsız olmalıdır. Bu durumda Laplace denklemindeki ϕ türevi sıfır olur.



Azimutal simerik durum için Laplace denklemi şöyledir.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0$$

Değişkenlere ayırma yöntemi için $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ olsun. Denklem şöyle olur.

$$\Theta\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0$$

Denklemi $R\Theta$ ile bölelim.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0$$

Radyal ve açısal kısımlar ayrı ayrı sabit olmalıdır.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\lambda$$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-\lambda$$

İlk olarak açısal denkleme bakalım çünkü bu çözümde λ sabiti belirlenecek. Açısal denklemi türevleri alıp düzeltelim.

$$\frac{\partial}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=-\lambda\sin\theta\,\Theta$$

$$\sin\theta\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cos\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+\lambda\sin\theta\,\Theta=0$$

Burada $x=\cos\theta$ dönüşümü yaparız ve $dx/d\theta=-\sin\theta$ olur.

$$\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dx}(-\sin\theta)=-\frac{d\Theta}{dx}\sin\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{d\Theta}{dx}\sin\theta\right)&=-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)\sin\theta-\frac{d\Theta}{dx}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta)\\&=-\sin\theta\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{dx}\right)\frac{dx}{d\theta}-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta=-\sin\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}(-\sin\theta)-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta\\&=\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta\end{aligned}$$

$$\sin\theta\left[\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta\right]+\cos\theta\left[-\frac{d\Theta}{dx}\sin\theta\right]+\lambda\sin\theta\,\Theta=0$$

$$\sin\theta\left[\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta\right]-\frac{d\Theta}{dx}\sin\theta\cos\theta+\lambda\sin\theta\,\Theta=0$$

$$\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}-\frac{d\Theta}{dx}\cos\theta-\cos\theta\frac{d\Theta}{dx}+\lambda\Theta=\sin^2\theta\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2\cos\theta\frac{d\Theta}{dx}+\lambda\Theta=0$$

Burada $\cos\theta=x$ ve $\sin^2\theta=1-x^2$ yerleştirelim.

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\lambda\Theta=0$$

Bu denklem Legendre denklemidir. Çözümü olması için $\lambda=l(l+1)$ ve $l=0,1,2,3\ldots$ olmalıdır. Aksi halde çözüm çıkmaz.

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0$$

Denklemde (±1) tekil noktadır ve çözüm $[-1,1]$ aralığında geçerlidir. Çözümleri bulmak için seri yöntemiyle çözüm aranır ve her l değeri için polinomlar elde edilir. İkinci dereceden diferansiyel denklemin çözümü lineer bağımsız iki çözümdür. Genel çözüm şöyle olur.

$$\Theta_l(x)=c_1P_l(x)+c_2Q_l(x)$$

Bu çözümlerden ilki $P_l(x)$ sınır noktalarında sonlu değer alır. İkinci $Q_l(x)$ ise sonsuza gider.

$$P_l(\pm1)\to\pm1 \qquad\qquad Q_l(\pm1)\to\pm\infty$$

Bu nedenle uygulamalarda ikinci çözüm genelde kullanılmaz ve $c_2=0$ olur. Burada $x=\cos\theta$ ile açı bağımlılığı olduğu için sonsuza giden fonksiyonları çözüm olarak kullanamayız. Çözümlerde $l=0,1,2,3\ldots$ için sadece $P_l(x)$ kullanacağız. Denklem şöyle yazılır.

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2}-2x\frac{dP_l}{dx}+l(l+1)P_l=0$$

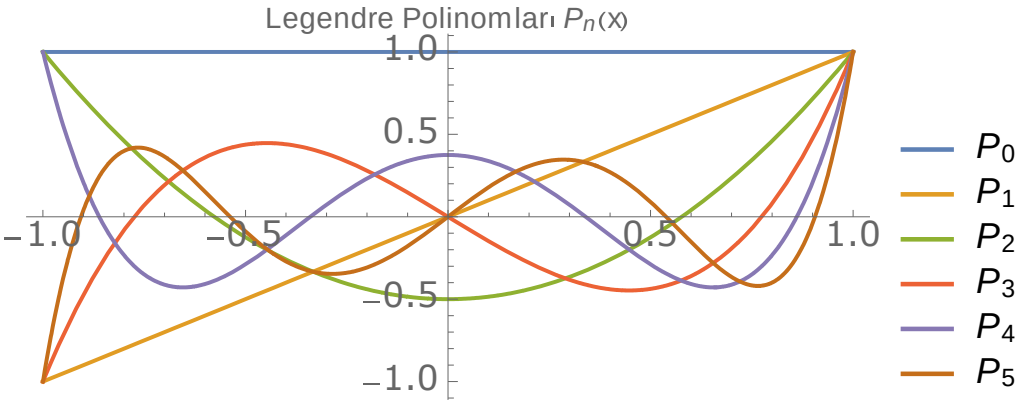
Legendre polinomlarının genel formülü şöyle verilir.

$$P_l(x)=\sum_{s=0}^{[l/2]}\frac{(-1)^s}{2^l}\frac{(2l-2s)!}{(l-2s)!\,s!\,(l-s)!}x^{l-2s}$$

Fakat çözümlerde bu seri açılımı yerine serinin ilk bir kaç terimini kullanmak yeterlidir. Bazı Legendre polinomları şöyledir.

$P_0(x) = 1$ $P_1(x) = x$ $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$



Legendre polinomlarında ortogonallik bağlantısı şöyledir.

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\, \delta_{lm}$$

İntegrali $x = \cos\theta$ ile açı türünden yazabiliriz. Sınırlar $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi$ için $x = -1$ olur. Diferansiyeli $dx = -\sin\theta\ d\theta$ ile değiştiririz ve eksi işaret sınırları ters çevirir.

$$\int_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta) \sin\theta\ d\theta = \frac{2}{2l+1}\, \delta_{lm}$$

Açısal denklemin çözümü $x = \cos\theta$ ile şöyle olur. Polinomlardaki x yerine $\cos\theta$ koyulur.

$$\Theta_l(\theta) = P_l(\cos\theta)$$

Şimdi de radyal denkleme bakalım. Denkleme $\lambda = l(l+1)$ koymalıyız.

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - l(l+1)R = r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0$$

Bu Cauchy-Euler denklemidir ve genel çözümü şöyledir.

$$R(r) = c_1 r^l + c_2 \frac{1}{r^{l+1}}$$

Kürenin içi ve dışı için çözümleri ayrı ayrı buluruz.

Kürenin içinde $0 < r < a$ için çözüm arıyorsak $r = 0$ noktasında ıraksak olmaması için $c_2 = 0$ alırız.

$$R_l(r) = r^l$$

Genel çözüm şöyledir.

$$u_l(r,\theta) = A_l R_l(r) P_l(\cos\theta) = A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta)$$

Sınır koşulu $u(a,\theta) = f(\theta)$ olarak verildi.

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l\, a^l\, P_l(\cos\theta) = f(\theta)$$

Katsayılar ortogonallik bağlantısıyla bulunur.

$$A_l = \frac{1}{a^l}\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, f(\theta)\sin\theta\ \ d\theta$$

Kürenin dışında $r > a$ için çözüm arıyorsak $r \to \infty$ limitinde ıraksak olmaması için $c_2 = 0$ alırız.

$$R_l(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$$

Genel çözüm şöyledir.

$$u_l(r,\theta) = B_l R_l(r) P_l(\cos\theta) = B_l\, \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\theta)$$

Sınır koşulu $u(a,\theta) = f(\theta)$ olarak verildi.

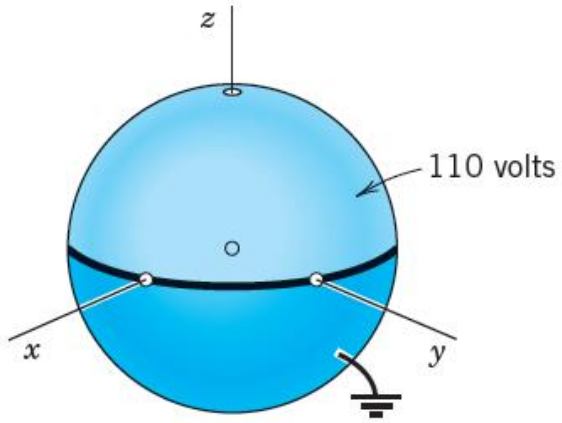
$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l\, \frac{1}{a^{l+1}}\, P_l(\cos\theta) = f(\theta)$$

Katsayılar ortogonallik bağlantısıyla bulunur.

$$B_l = a^{l+1}\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, f(\theta)\sin\theta\ \ d\theta$$

ÖRNEK: KÜRESEL KAPASİTÖR

Aralarında yalıtım için ince şerit bulunan iki metal yarımküreden oluşan bir kürenin yarıçapı $1\,m$'dir. Eğer üst küre $110\,V$ 'da tutuluyor ve alt yarımküre topraklanmış ise bu küresel kapasitörün içindeki ve dışındaki potansiyeli bulun.



Çözüm:

Yarıçap $a = 1$ verilmiş. Sınır koşulu şöyledir.

$$f(\theta) = \begin{cases} 110 & 0 \le \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \le \theta < \pi \end{cases}$$

Kürenin içindeki çözüme bakalım. Katsayılar şöyledir.

$$A_l = \frac{1}{a^l}\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, f(\theta)\sin\theta\ \ d\theta = 110\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi/2} P_l(\cos\theta)\ \sin\theta\ \ d\theta$$

Burada $x = \cos\theta$ dönüşümü yaparsak integral kolaylaşır ve $dx = -\sin\theta\ \ d\theta$ olur. İntegral sınırları $\theta = 0$ için $x = 1$ ve $\theta = \pi/2$ için $x = 0$ olur.

$$A_l = 110\frac{2l+1}{2}\int_0^{1} P_l(x)\, dx$$

Katsayılar için genel çözüm bulmak için Legendre polinomlarının integralinin genel formülü gerekir. Bunun yerine indisler $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ için ilk altı katsayının integrallerini hesaplayalım.

$$A_0 = 110\frac{2\cdot 0+1}{2}\int_0^1 P_0(x)\,dx = \frac{110}{2}\int_0^1 1\,dx = \frac{110}{2}[x]_0^1 = \frac{110}{2}(1-0) = 55$$

$$A_1 = 110\frac{2\cdot 1+1}{2}\int_0^1 P_1(x)\,dx = 110\frac{3}{2}\int_0^1 x\,dx = 110\frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 110\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{165}{2}$$

$$A_2 = 110\frac{2\cdot 2+1}{2}\int_0^1 P_2(x)\,dx = 110\frac{5}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = 110\frac{5}{4}[x^3-x]_0^1$$

$$= 110\frac{5}{4}(0-0) = 0$$

$$A_3 = 110\frac{2\cdot 3+1}{2}\int_0^1 P_3(x)\,dx = 110\frac{7}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = 110\frac{7}{4}\left[\frac{5}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= 110\frac{7}{4}\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}-0\right) = -\frac{385}{8}$$

$$A_4 = 110\frac{2\cdot 4+1}{2}\int_0^1 P_4(x)\,dx = 110\frac{9}{2}\int_0^1 \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,dx$$

$$= 110\frac{9}{16}\left[\frac{35}{5}x^5-10x^3+3x\right]_0^1 = 110\frac{9}{16}(7-10+3) = 0$$

$$A_5 = 110\frac{2\cdot 5+1}{2}\int_0^1 P_5(x)\,dx = 110\frac{11}{2}\int_0^1 \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\,dx$$

$$= 110\frac{11}{16}\left[\frac{63}{6}x^6-\frac{70}{4}x^4+\frac{15}{2}x^2\right]_0^1 = 110\frac{11}{16}\left(\frac{63}{6}-\frac{70}{4}+\frac{15}{2}\right) = \frac{605}{6}$$

Kürenin içinde çözüm şöyledir.

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\, r^l\, P_l(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx A_0\, r^0\, P_0(\cos\theta) + A_1\, r^1\, P_1(\cos\theta) + A_2\, r^2\, P_2(\cos\theta) + A_3\, r^3\, P_3(\cos\theta) + A_4\, r^4\, P_4(\cos\theta) + A_5\, r^5\, P_5(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx 55 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{165}{2}\, r\cos\theta + 0 - \frac{385}{8}\, r^3\, \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 0 + \frac{605}{6}\, r^5\, \frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx 55 + \frac{165}{2}\, r\cos\theta - \frac{385}{16}\, r^3\, (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{605}{48}\, r^5\, (63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

Kürenin dışındaki potansiyel aynı biçimde çözülür. Katsayılar şöyledir.

$$B_l = a^{l+1}\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, f(\theta)\sin\theta\; d\theta$$

Katsayılar arasında şöyle bağlantı vardır.

$$A_l a^l = B_l / a^{l+1} \qquad A_l a^{2l+1} = B_l$$

Aynı integralleri almadan B_l katsayılarını bulabiliriz. Bu örnek için, $a = 1$ olduğundan $B_l = A_l$ olur.

$$B_0 = 55 \qquad B_1 = 165/2 \quad B_2 = 0 \qquad B_3 = -385/8 \qquad B_4 = 0 \qquad B_5 = 605/6$$

Kürenin dışında çözüm şöyledir.

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx B_0 \frac{1}{r^1}\, P_0(\cos\theta) + B_1 \frac{1}{r^2}\, P_1(\cos\theta) + B_2\, \frac{1}{r^3}\, P_2(\cos\theta) + B_3\, \frac{1}{r^4}\, P_3(\cos\theta) + B_4 \frac{1}{r^5}\, P_4(\cos\theta) + B_5 \frac{1}{r^6}\, P_5(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx 55\frac{1}{r}1 + \frac{165}{2}\frac{1}{r^2}\cos\theta + 0 - \frac{385}{8}\, \frac{1}{r^4}\, \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 0 + \frac{605}{6}\, \frac{1}{r^6}\, \frac{1}{8}(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) \approx \frac{55}{r} + \frac{165}{2r^2}\cos\theta - \frac{385}{16r^4}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) + \frac{605}{48r^6}\left(63\cos^5\theta - 70\cos^3\theta + 15\cos\theta\right)$$